

PEDRO HENRIQUE CERENTO DE LYRA

MODELAGEM NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
ARMADO UTILIZANDO O PROGRAMA ATENA

São Paulo
2011

PEDRO HENRIQUE CERENTO DE LYRA

MODELAGEM NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
ARMADO UTILIZANDO O PROGRAMA ATENA

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia Civil

São Paulo

2011

PEDRO HENRIQUE CERENTO DE LYRA

MODELAGEM NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
ARMADO UTILIZANDO O PROGRAMA ATENA

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia Civil

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt

São Paulo

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Lyra, Pedro Henrique Cerento de
Modelagem numérica de estruturas de concreto armado
utilizando o programa ATENA / P.H.C. de Lyra. -- São Paulo,
2011.

124 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e
Geotécnica.

1. Estruturas de concreto armado 2. Análise numérica (Mo-
delagem) 3. Resistência estrutural I. Universidade de São Paulo.
Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e
Geotécnica II. t.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Pedro Lyra e Iraci Lyra pelo apoio, ajuda, confiança e a acima de tudo pela educação.

Ao meu irmão Paulo Lyra também pela ajuda e companheirismo nas horas que eu precisei.

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Tulio N. Bittencourt, minha eterna gratidão pela sua orientação, pelo seu constante incentivo e pelas excelentes oportunidades que me proporcionou dentro da Escola Politécnica da USP.

A todos meus amigos do GMEC, que sempre estiveram de uma forma ou de outra motivando o desenvolvimento desse trabalho. Em especial, gostaria de destacar a imensurável ajuda dos companheiros Alberto Colombo, Ana Carolina Marques, Luciana Kataoka e Luis Bittencourt, sem os quais os caminhos para a finalização desse trabalho teriam sido muito mais difíceis.

A empresa EGT e aos amigos e colegas que lá trabalham pela contribuição que cada um me ofereceu em momentos oportunos, em especial aos engenheiros Kalil J. Skaf e Thais Filogônio.

Aos demais profissionais e professores que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Com o avanço tecnológico dos computadores e o desenvolvimento de soluções para problemas não lineares através do método dos elementos finitos, hoje é possível fazer uma análise mais complexa e mais próxima da realidade.

É de extrema importância a verificação dos resultados obtidos pelos programas com a realidade e saber em quais casos esses modelos podem ser aplicados.

Assim, o objetivo deste trabalho é discutir as vantagens e desvantagens da modelagem de estruturas de concreto armado em duas e três dimensões, através dos modelos de fissuras distribuídas.

Foram escolhidos três experimentos para a modelagem numérica: o primeiro trata-se de um experimento com uma viga de concreto armado (LEONHARDT; WALTHER, 1962), o segundo experimento também é realizado com uma viga de concreto armado (BRESLER; SCORDELIS, 1963) e o terceiro experimento utiliza vigas de concreto armado em escala reduzida, fabricadas com microconcreto e arame, simulando uma barra de aço lisa (ALMEIDA et al, 2006).

Para a modelagem numérica, utilizando-se o modelo de fissuras distribuídas com fissura rotacional e a análise das estruturas de concreto foi escolhido o programa comercial ATENA – “*Advanced Tool Engineering Non-linear Analysis*”.

Palavras-chave: modelo de fissuração distribuída, concreto armado, ATENA, modelagem numérica.

ABSTRACT

The technological advancement of computers and the development of solutions for nonlinear problems by finite element method are now possible to make more complex the analysis and closer to reality.

It is extremely important to verify the results obtained by programs with reality and know which cases these models can be applied.

So the objective is to discuss the advantages and disadvantages of modeling reinforced concrete structures in two and three dimensions, through the smeared cracking models.

Three experiments were chosen to make the numerical modeling: the first is an experiment with a reinforced concrete beam (LEONHARDT; WALTHER, 1962), the second experiment is also a reinforced concrete beam (BRESLER; SCORDELIS, 1963) and the third experiment is reinforced concrete beams with small-scale and made of wire microconcrete simulating flat steel bar (ALMEIDA et al, 2006).

For numerical modeling, using the smeared crack model with rotational crack, and analysis of concrete structures was chosen the commercial program ATENA - Advanced Tool Engineering Non-linear Analysis.

Keywords: smeared crack model, reinforced concrete, ATENA, numerical modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - a) Modelo de fissuração discreta;	18
Figura 2.2 - a) imagem microscópica eletrônica de uma argamassa, b) imagem trifásica após o tratamento e c) reticulado de barras com diferentes propriedades para os elementos. (BITTENCOURT, 1999)	20
Figura 2.3 - Modelo de fissuras discretas. (BITTENCOURT, 1999)	21
Figura 2.4 - Modelo analítico idealizado por Ngo e Scordelis. (Adaptado de NGO e SCORDELIS, 1967)	22
Figura 2.5 - Abordagem de fissuras distribuídas. (BITTENCOURT, 1999)	24
Figura 2.6 - Principais características do modelo de faixa de fissura. (BITTENCOURT, 1999).....	25
Figura 2.7 - Exemplo do modelo de faixas de Bazant em uma viga-parede. (CERVENKA; CERVENKA; PUKL, 2002)	26
Figura 3.1 - Elementos de duas dimensões para representação do concreto armado. (CERVENKA; CERVENKA; PUKL, 2002)	29
Figura 3.2 - Elementos de três dimensões para representação do concreto armado. (CERVENKA; CERVENKA; PUKL, 2002)	29
Figura 3.3 - Geometria do elementos CCIsoQuad<....>. (CERVENKA, 2009)	30
Figura 3.4 - Geometria dos elementos CCIsoBrick<....>. (CERVENKA, 2009)	32
Figura 3.5 - Geometria do elemento CCIsoTruss. (ATENA, 2009).....	35
Figura 3.6 - Trajetórias de equilíbrio típicas da análise de estruturas de concreto. (SILVA, 2002).....	37
Figura 3.7 - Curvas carga versus deslocamento nas quais se aplica o método de convergência de comprimento de arco. (BUENO, 1999)	38
Figura 3.8 - Processo incremental-iterativo com controle de comprimento de arco. (FUINA, 2004)	41
Figura 4.1 - Componentes de tensões do estado plano de tensão. (CERVENKA, 2009)	45
Figura 4.2 - Componentes de deformações do estado plano de tensão. (CERVENKA, 2009)	45
Figura 4.3 - Rotação dos eixos. (CERVENKA, 2009).....	46

Figura 4.4 - Lei tensão x deformação uniaxial para o concreto. (Adaptado de CERVENKA, 2009)	48
Figura 4.5 - Curva exponencial de abertura de fissura. (Adaptado de CERVENKA; CERVENKA; PUKL, 2002).	50
Figura 4.6 - Diagrama tensão versus deformação na compressão. (CERVENKA, 2009).	51
Figura 4.7 - Curva tensão efetiva versus deslocamento na compressão. (CERVENKA, 2009).	52
Figura 4.8 - Definição da localização da faixa. (Adaptado de CERVENKA, 2009)....	54
Figura 4.9 - Estágios da abertura de fissura. (Adaptado de CERVENKA, 2009).	55
Figura 4.10 - Diagrama de ruptura biaxial do concreto. (Adaptado de CERVENKA, 2009).	56
Figura 4.11 - Função de ruptura tensão x compressão para o concreto. (Adaptado de CERVENKA, 2009).	58
Figura 4.12 - Redução da força de compressão no concreto fissurado. (CERVENKA, 2009).	58
Figura 4.13 - Sistema de coordenadas para o concreto fissurado. (CERVENKA, 2009).	60
Figura 4.14 – Comprimento característico e “ <i>tensile softening</i> ”. (Adaptado de CERVENKA, 2009).	64
Figura 4.15 – Endurecimento / amolecimento por compressão e o comprimento característico. (CERVENKA, 2009).	68
Figura 4.16 – Algoritmo do correto-preditor plástico. (CERVENKA, 2009).....	70
Figura 4.17 – Representação esquemática do processo iterativo mostrado em duas dimensões. (CERVENKA, 2009).	70
Figura 5.1 - Propriedades geométricas e esquema de ensaio em quatro pontos. (LEONHARDT; WALTHER, 1962)	77
Figura 5.2 - Divisão da viga em elementos de 5cm x 5cm e a visualização dos apoios.....	78
Figura 5.3 - Localização e o valor da deformação imposta.	78
Figura 5.4 - Pontos de integração.	79
Figura 5.5 – Valores dos parâmetros de entrada.	79
Figura 5.6 – Valores dos parâmetros de entrada.	80
Figura 5.7 – Valores dos parâmetros de entrada.	80

Figura 5.8 - Valores dos parâmetros de entrada.	80
Figura 5.9 - Divisão da viga em elementos do tipo CCIsoBrick.....	81
Figura 5.10 – Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.....	82
Figura 5.11 - Padrão de fissuração observado no experimento.....	82
Figura 5.12 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 2D utilizando a fissura fixa.	83
Figura 5.13 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 2D utilizando a fissura rotacional.	83
Figura 5.14 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 3D.....	83
Figura 5.15 - Viga OA1.....	84
Figura 5.16 - Divisão da viga em elementos de 2,5cm x 2,5cm e a visualização dos apoios.....	85
Figura 5.17 - Localização e o valor da deformação imposta.	85
Figura 5.18 – Valores dos parâmetros de entrada.	86
Figura 5.19 – Valores dos parâmetros de entrada.	86
Figura 5.20 – Valores dos parâmetros de entrada.	86
Figura 5.21 - Valores dos parâmetros de entrada.....	86
Figura 5.22 - Divisão da viga em elementos CCIsoBrick.	87
Figura 5.23 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.....	88
Figura 5.24 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 2D utilizando a fissura fixa.	88
Figura 5.25 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 2D utilizando a fissura rotacional.	89
Figura 5.26 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 3D.....	89
Figura 5.27 - Dimensão das vigas e aplicação do carregamento. (ALMEIDA ET AL.,2006).....	90
Figura 5.28 - Curva tensão x deformação e o teste de arrancamento para o arame. (ALMEIDA ET AL.,2006)	92
Figura 5.29 - Divisão da viga em elementos do tipo CCIsoQuad.....	93
Figura 5.30 - Visualização dos apoios.....	94
Figura 5.31 - Visualização da deformação imposta.....	94
Figura 5.32 - Pontos de integração dos elementos.....	95

Figura 5.33 - Parâmetros de entrada.	95
Figura 5.34 - Parâmetros de entrada.	96
Figura 5.35 - Parâmetros de entrada.	96
Figura 5.36 - Parâmetros de entrada.	96
Figura 5.37 - Divisão da viga em elementos do tipo CCIsoBrick.....	97
Figura 5.38 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.....	98
Figura 5.39 – Sigma xx antes do efeito de “ <i>snap-through</i> ”.....	99
Figura 5.40 - Padrão de fissuração antes do efeito de “ <i>snap-through</i> ” obtido pelo programa ATENA 3D.	99
Figura 5.41 – Sigma xx próximo da ruptura.....	100
Figura 5.42 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 3D.....	100
Figura 5.43 – Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 2D.....	101
Figura 5.44 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.....	102
Figura 5.45 - Sigma xx antes do efeito de “ <i>snap-through</i> ”.	103
Figura 5.46 - Padrão de fissuração antes do efeito de “ <i>snap-through</i> ” obtido pelo programa ATENA 3D.	103
Figura 5.47 - Sigma xx próximo da ruptura.	104
Figura 5.48 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 3D.....	104
Figura 5.49 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 2D.....	105
Figura 5.50 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.....	106
Figura 5.51 - Sigma xx antes do efeito de “ <i>snap-through</i> ”.	107
Figura 5.52 - Padrão de fissuração antes do efeito de “ <i>snap-through</i> ” obtido pelo programa ATENA 3D.	107
Figura 5.53 - Sigma xx próximo da ruptura.	108
Figura 5.54 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 3D.....	108

Figura 5.55 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 2D.....	109
Figura 5.56 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.....	110
Figura 5.57 - Sigma xx antes do efeito de “ <i>snap-through</i> ”.....	111
Figura 5.58 - Padrão de fissuração antes do efeito de “ <i>snap-through</i> ” obtido pelo programa ATENA 3D.	111
Figura 5.59 - Sigma xx próximo da ruptura.	112
Figura 5.60 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 3D.....	112
Figura 5.61 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 2D.....	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Função de interpolação dos elementos CCIsoQuad<....>. (CERVENKA, 2009)	31
Tabela 3.2 - Função de interpolação dos elementos CCIsoBrick<....>. (CERVENKA, 2009)	33
Tabela 3.1 - funções de interpolação dos elementos CCIsoTruss. (ATENA, 2009) ..	35
Tabela 3.2 - Pontos para a integração de Gauss para elementos CCIsoTruss de 2 e 3 nós. (ATENA, 2009)	36
Tabela 4.1 - Apresenta os parâmetros usados na redução hiperbólica A.	57
Tabela 4.2- Parâmetros padrões do modelo constitutivo. (Cervenka, 2009).....	61
Tabela 5.1 - Tabela resumo dos resultados.	84
Tabela 5.2 - Tabela resumo dos resultados.	89
Tabela 5.3 – Dimensões das seções T e retangular e o arranjo da armadura. (ALMEIDA ET AL, 2006)	90
Tabela 5.4- Características do microconcreto. (ALMEIDA ET AL.,2006)	91
Tabela 5.5 - Resumo das cargas máximas obtidas em cada modelo.	98
Tabela 5.6 - Resumo das cargas máximas obtidas em cada modelo.	102
Tabela 5.7 - Resumo das cargas máximas obtidas em cada modelo.	106
Tabela 5.8 - Resumo das cargas máximas obtidas em cada modelo.	110

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Justificativa	13
1.2	Objetivos	14
1.3	Sobre o programa ATENA	15
1.4	Apresentação do trabalho	16
2	ABORDAGENS PARA MODELAGEM DO CONCRETO ARMADO	17
2.1	Introdução	17
2.2	Modelos de fissuração para o concreto	18
2.2.1	<i>Modelo de fissuração da microestrutura</i>	19
2.2.2	<i>Modelo de fissuração discreta</i>	21
2.2.3	<i>Modelo de fissuração distribuída</i>	23
3	MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS À ANÁLISE NÃO LINEAR	28
3.1	Introdução	28
3.2	Modelo de elementos finitos para o concreto armado	28
3.2.1	<i>Introdução</i>	28
3.2.2	<i>Modelo para o concreto</i>	30
3.2.2.1	<i>Representação no ATENA</i>	30
3.2.3	<i>Modelo para barra de aço</i>	33
3.2.3.1	<i>Representação no ATENA</i>	34
3.3	Método de solução das equações não lineares	36
3.3.1	<i>Introdução</i>	36
3.3.2	<i>Método incremental-iterativo</i>	39
3.3.2.1	<i>Método comprimento de arco</i>	42
4	MODELOS CONSTITUTIVOS	43
4.1	Modelo Constitutivo do concreto SBETA	43
4.1.1	<i>Conceito do modelo constitutivo SBETA</i>	43
4.1.2	<i>Resumo das tensões no modelo constitutivo SBETA</i>	44
4.1.3	<i>Tensão, deformação e rigidez do material</i>	44
4.1.4	<i>Relação tensão x deformação do concreto</i>	47

4.1.4.1	Lei equivalente uniaxial.....	47
4.1.4.2	Concreto não fissurado	49
4.1.4.3	Concreto fissurado	49
4.1.4.4	Compressão sem esmagamento do concreto.....	51
4.1.4.5	Compressão com esmagamento do concreto.....	52
4.1.5	<i>Controle das deformações localizadas na ruptura.....</i>	53
4.1.5.1	Efeito do tamanho do elemento	54
4.1.5.2	Efeito da direção do elemento.....	54
4.1.6	<i>Processo de fraturamento</i>	55
4.1.7	<i>Critério de ruptura biaxial do concreto.....</i>	56
4.1.7.1	Ruptura à compressão.....	56
4.1.7.2	Ruptura à tração	57
4.1.8	<i>Força de compressão do concreto fissurado.....</i>	58
4.1.9	<i>Enrijecimento da tração no concreto fissurado.....</i>	59
4.1.10	<i>Matriz de rigidez do material</i>	59
4.1.10.1	Concreto íntegro.....	59
4.1.10.2	Concreto fissurado	60
4.1.11	<i>Parâmetros padrões do modelo constitutivo</i>	61
4.2	Modelo Constitutivo de fratura plástica.....	62
4.2.1	<i>Introdução.....</i>	62
4.2.2	<i>Formulação do modelo do material</i>	62
4.2.3	<i>Modelo de fratura de Rankine para a fissuração do concreto.</i>	63
4.2.4	<i>Modelo de plasticidade para o esmagamento do concreto.....</i>	66
4.2.5	<i>Combinação do modelo de plasticidade e de fratura.....</i>	72
4.3	Modelo Constitutivo da armadura	76
4.3.1	<i>Lei bilinear</i>	76
5	MODELAGEM COMPUTACIONAL.....	77
5.1	Viga de concreto armado ensaiada por LEONHARDT e WALTHER	77
5.1.1	<i>Modelagem no ATENA 2D</i>	77
5.1.2	<i>Modelagem no ATENA 3D</i>	80
5.1.3	<i>Resultados.....</i>	81
5.2	Viga de concreto armado ensaiada por BRESLER e SCORDELIS.....	84
5.2.1	<i>Modelagem no ATENA 2D</i>	84
5.2.2	<i>Modelagem no ATENA 3D</i>	87

5.2.3	<i>Resultados</i>	87
5.3	Vigas de concreto armado em escala reduzida ensaiadas por ALMEIDA et al. 90	
5.3.1	<i>Modelagem no ATENA 2D</i>	92
5.3.2	<i>Modelagem no ATENA 3D</i>	96
5.3.3	<i>Resultados</i>	98
5.3.3.1	Viga R2	98
5.3.3.2	Viga TP2	102
5.3.3.3	Viga TM2.....	106
5.3.3.4	Viga TG2.....	110
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	114
6.1	Conclusão	114
6.2	Trabalhos futuros	116
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

1 INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa

Atualmente, as estruturas de concreto são amplamente utilizadas por serem mais baratas do que os outros tipos de estruturas. Na maioria dos casos, as estruturas são calculadas através de formulações simplificadas baseadas em experimentos.

Os escritórios, cada vez mais, utilizam programas comerciais específicos para a engenharia civil, que usam o método dos elementos finitos, para auxiliar nos projetos. No entanto, a maioria desses programas considera as propriedades dos materiais lineares.

Com o avanço tecnológico dos computadores e o desenvolvimento do método dos elementos finitos, aliado com a não linearidade do problema, é possível fazer uma análise mais complexa e mais próxima da realidade.

O principal obstáculo para a análise não linear, utilizando o método dos elementos finitos nas estruturas de concreto armado, é a dificuldade em caracterizar as propriedades do material.

Muitas pesquisas já foram realizadas com a finalidade de encontrar um modelo que se aproxime ao máximo da realidade para conseguir prever o comportamento da estrutura de concreto perante o carregamento.

Devido à complexidade do concreto armado, encontrar um modelo constitutivo apropriado é um grande desafio. Apesar dos grandes avanços alcançados na teoria da plasticidade, teoria do dano, mecânica da fratura, dentre outros, ainda não existe um modelo constitutivo completo e único para o concreto armado.

Muitos códigos de uso geral, disponíveis no mercado, fornecem algum tipo de modelo de material destinado a ser empregado na análise de estruturas de concreto. É de extrema importância a verificação dos resultados obtidos pelos programas com esses modelos de materiais fornecidos, relacionando-os à realidade para saber em quais casos esses modelos podem ser aplicados.

1.2 Objetivos

Foram escolhidos três experimentos para se realizar a modelagem numérica: o primeiro trata-se de um experimento com uma viga de concreto armado (LEONHARDT; WALTHER, 1962), o segundo experimento também é realizado com uma viga de concreto armado (BRESLER e SCORDELIS, 1963) e o terceiro experimento utiliza vigas de concreto armado em escala reduzida, fabricadas com microconcreto e arame, simulando uma barra de aço lisa (ALMEIDA ET AL, 2006).

Para a modelagem e a análise numérica das estruturas de concreto, foi escolhido o programa comercial ATENA – “*Advanced Tool Engineering Non-linear Analysis*”. O programa ATENA foi escolhido porque é um programa conhecido internacionalmente e o LEM (Laboratório de Estruturas e Materiais) possui a licença para usá-lo.

A modelagem será feita usando o modelo de fissuração discreta com fissura rotacional. Assim este trabalho tem como objetivo:

- No âmbito da mecânica da fratura, pretende ser uma importante referência na verificação da capacidade de predição do comportamento da peça estrutural;
- Verificar se a modelagem em três dimensões consegue obter resultados que se aproximem da realidade, isto é, a robustez da formulação, utilizando os resultados obtidos dos experimentos estudados;
- Comparar o modelo de três dimensões com o de duas dimensões. Verificar se o tempo gasto a mais com modelagem e processamento do modelo de três dimensões é compensado com melhores resultados do que os obtidos com o modelo em duas dimensões.
- Verificar se a influência do formato da seção transversal em peças levemente armadas ocorre nos modelos em três dimensões.

As comparações do resultado do experimento com o resultado da modelagem numérica serão realizadas por meio do gráfico de carga versus deslocamento ou do padrão de fissuração ou pela tensão obtida no barra de aço.

Já a comparação entre os modelos de duas e três dimensões será feita através dos campos de deformações e tensões, além do gráfico de carga versus deslocamento e o padrão de fissuração.

1.3 Sobre o programa ATENA

ATENA, "*Advanced Tool for Engineering Non-linear Analysis*", é um pacote de programas comerciais que utilizam a análise de elementos finitos não lineares de estruturas, oferecendo ferramentas especialmente concebidas para a simulação em computador do concreto armado e para entender seu comportamento estrutural.

O programa ATENA consiste em um núcleo de soluções e interfaces para o usuário. O núcleo de solução oferece recursos para a variedade de tarefas de análise estrutural, tais como: análise de tensões e ruptura, transporte de calor e umidade, tempo de problemas dependentes (fluência, dinâmica), e suas interações. Para a interface do usuário, é oferecida uma vasta gama de modelos 2D e 3D, bibliotecas de elementos finitos, modelos materiais e métodos de solução.

A interface do usuário é especializada em certas funções e, portanto, uma interface do usuário não tem necessariamente de dar acesso a todas as funcionalidades do núcleo ATENA de solução. Por exemplo, para modelar em 3D é necessário entrar no programa ATENA 3D, nele não é possível fazer uma modelagem em 2D.

Essa limitação é feita com a finalidade de se manter um ambiente transparente e fácil uso em todas as aplicações específicas do ATENA.

O programa ATENA 2D e 3D é projetado para análise não linear de elementos planos e sólidos 3D, respectivamente, com ferramentas especiais para as estruturas de concreto armado. No entanto, outros materiais, tais como solos, metais, reforço com fibra, podem ser modelados pelo programa. O programa tem três funções principais:

- Pré-processamento. Entrada de objetos geométricos (concreto, armaduras, interfaces, etc), condições de carga e de fronteira e os parâmetros de solução.
- Acompanhamento da análise. O programa torna possível um acompanhamento em tempo real dos resultados durante os cálculos realizados pelo programa.
- Pós-processamento. O acesso a uma vasta gama de resultados gráficos e numéricos.

1.4 Apresentação do trabalho

Este trabalho está dividido em sete capítulos, sendo que o primeiro aborda a introdução, justificativa da pesquisa e a apresentação do trabalho.

No capítulo 2, são apresentados os tipos de abordagens para a modelagem numérica. É importante entender o tipo de modelo usado para saber as suas vantagens e limitações.

O capítulo 3 aborda as ferramentas utilizadas no método de elementos finitos aplicados durante a análise não linear da estrutura.

O capítulo 4 descreve os modelos constitutivos usados para simular o comportamento real da estrutura tanto para duas dimensões ou para três dimensões, que serão adotados e as teorias que estão por trás deles.

No capítulo 5 são abordados os experimentos escolhidos e os resultados obtidos através do tipo de modelagem escolhida.

O capítulo 6 apresenta a conclusão obtida através da comparação dos resultados das diferentes modelagens.

E, finalmente, no capítulo 7 estão as referências bibliográficas que foram consultadas ou utilizadas para este trabalho.

2 ABORDAGENS PARA MODELAGEM DO CONCRETO ARMADO

Neste capítulo, são apresentados os diversos modelos de fissuração utilizados na modelagem numérica das estruturas de concreto armado para simular o seu comportamento.

2.1 Introdução

Segundo STRAMANDINOLI (2007), as estruturas de concreto armado podem ser modeladas por elementos unidimensionais, bidimensionais, tridimensionais ou mistos.

Os elementos unidimensionais são as barras, que podem ter eixo reto ou curvo. Os elementos bidimensionais ou elementos planos possuem geralmente geometria triangular ou quadrilateral. Os elementos tridimensionais são os elementos sólidos, usualmente tetraédricos ou hexaédricos. Já os elementos mistos aparecem da combinação dos elementos citados anteriormente.

Podem ser utilizadas nas análises lineares e não linear, com inúmeras variações de métodos de solução, modelo constitutivo e outros para análise dessas estruturas.

Em uma análise linear, tem-se um comportamento linear com o carregamento aplicado, isto é, o carregamento aplicado é proporcional ao deslocamento da estrutura.

Já na análise não linear, incrementos constantes de carga não correspondem a incrementos constantes de deslocamentos. O comportamento não linear pode estar relacionado ao comportamento do material ou associado às mudanças da configuração da estrutura.

A não linearidade física, que é um comportamento não linear do material, é visto no concreto simples e, quando combinado com o aço, o seu comportamento é ainda mais complexo, devido à interação que ocorre entre ambos os materiais.

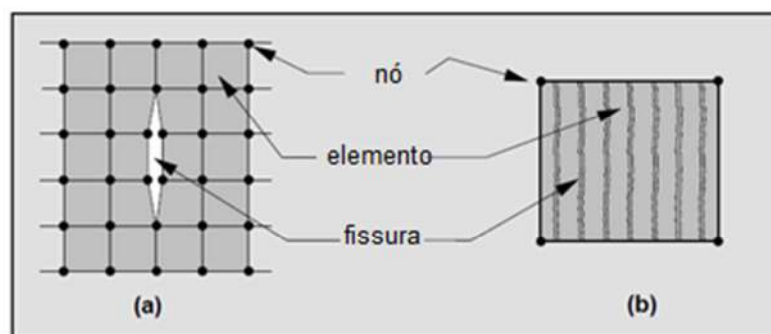
Para uma análise realista do comportamento de estruturas de concreto armado, deve-se levar em conta a não linearidade das relações tensão versus deformação dos materiais.

A seguir são apresentados alguns modelos de análise não linear física do material concreto armado.

2.2 Modelos de fissuração para o concreto

A primeira modelagem de estruturas de concreto em elementos finitos, que inclui a fissuração, foi feita por NGO e SCORDELIS (1967), que fizeram uma análise elástico-linear de vigas com padrões de fissurações pré-definidos. As fissuras foram modeladas separando os nós da malha de elementos finitos e, assim, criando o modelo de fissuração discreta, como apresentado na figura 2.1.

Em 1968, Rashid representou o concreto fissurado como um material ortotrópico com redução do módulo de elasticidade na direção normal ao plano da fissura, assim criando o primeiro modelo de fissuração distribuída. Com essa abordagem, a fissuração é distribuída na área do elemento e o comportamento do concreto fissurado pode ser representado pela média da relação tensão-deformação.



**Figura 2.1 - a) Modelo de fissuração discreta;
b) Modelo de fissuração distribuída. (Adaptado de FILIPPOU e KWAK, 1990)**

Segundo COPE ET AL. (1980), na década de oitenta houve muitos avanços nessa área, como o reconhecimento de que, devido aos efeitos de cisalhamento, a direção das tensões principais sofre alterações ao longo do processo de carregamento. Sem a consideração desses efeitos pode haver violações da resistência à tração do material em planos ortogonais ao plano de fissura.

Outro reconhecimento importante foi de que o concreto simples não é um material perfeitamente frágil. Assim, houve uma substituição de modelos de fratura frágil por modelos de amolecimento de tração chamados de *"tension-softening"*, isto é, existe uma capacidade residual de suportar carregamentos após atingir a resistência à tração.

No entanto, o modelo de fissuração distribuída possui um problema relacionado ao tamanho das malhas. Quando uma estrutura é modelada com elementos finitos grandes, cada elemento tem um grande efeito na matriz de rigidez global da estrutura. Assim, quando um único elemento tem a sua matriz de rigidez reduzida devido à fissura, a rigidez da estrutura é bruscamente reduzida.

Adaptando o conceito do modelo de fissura fictícia, apresentado no trabalho de HILLERBORG ET AL. (1976), BAZANT e OH desenvolveram o modelo da faixa de fissuras, conhecido como “*Crack Band Model*”, no qual a energia de fraturamento é distribuída sobre uma faixa de elementos, onde ocorre a localização das deformações (BAZANT, 1983).

Segundo BITTENCOURT (1999), na década de noventa surgiu uma abordagem baseada na microestrutura do concreto. Os modelos desenvolvidos com essa abordagem são conhecidos como modelos reticulados. No modelo reticulado, o material é idealizado como um reticulado formado de pequenos elementos de barras, o processo de fraturamento é simulado removendo, em cada etapa de carregamento, as barras cuja tensão de tração seja superior à sua resistência última, conforme a lei de fraturamento adotada.

Resumindo, existem três tipos de abordagens, atualmente, para modelar o fraturamento do concreto: abordagem discreta, a abordagem distribuída e a abordagem da microestrutura.

2.2.1 Modelo de fissuração da microestrutura

Nesse modelo, o material é idealizado com um reticulado formado de pequenos elementos de barra. Em cada etapa de carregamento, o processo de fraturamento é simulado removendo elementos do reticulado cuja máxima tensão de tração supere a resistência última de tração do material, simulando uma fratura frágil da barra. A determinação das tensões em cada elemento de barra é obtida através da análise elástica linear.

No caso de materiais como o concreto, que é um material heterogêneo, certa desordem tem de ser inserida no reticulado. A maneira mais direta é atribuir diferentes propriedades para todos os elementos de barra. Os valores de resistência dos elementos podem ser escolhidos aleatoriamente de uma distribuição normal. Outros métodos para programar a heterogeneidade também podem ser utilizados.

SCHLANGEN e GARBOCZI (SCHLANGEN, 1997) apresentaram ainda outra técnica mais realística para introduzir a heterogeneidade do material, pela qual a microestrutura foi implementada numa forma direta a partir de uma imagem eletrônica microscópica de uma peça real de concreto, como apresentado na figura 2.2.

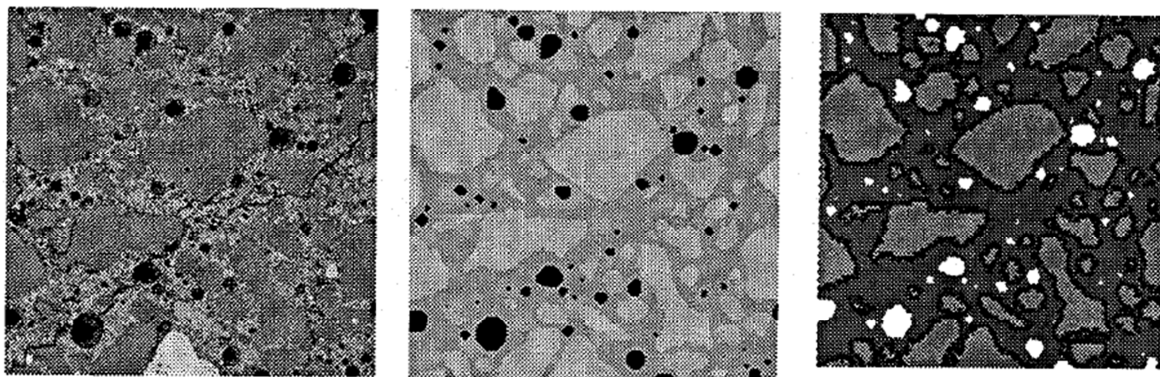


Figura 2.2 - a) imagem microscópica eletrônica de uma argamassa, b) imagem trifásica após o tratamento e c) reticulado de barras com diferentes propriedades para os elementos. (BITTENCOURT, 1999)

O reticulado de elementos de barra é projetado sobre a imagem tratada. Diferentes propriedades podem ser atribuídas aos elementos de barras nas diferentes zonas. Os resultados apresentam um forte apelo de realidade, contudo observa-se certa dependência do grau de refinamento do reticulado na distribuição de danos na microestrutura. Portanto, é muito importante fazer uma calibração do modelo reticulado antes de sua utilização, de forma a representar de forma mais realista possível a estrutura interna do material simulado.

Segundo BITTENCOURT (1999), diferentes experimentos têm mostrado que o modelo reticulado é uma ferramenta numérica muito poderosa na simulação de mecanismo de fraturamento no concreto. O fenômeno de ligações entre as faces de fissuras e a propagação de fissuras é previsto com boa concordância com o modelo experimental realizado, pelo menos em termos dos mecanismos de ruptura observados.

As seguintes deficiências são encontradas com esse modelo de fissuração:

- O reticulado bidimensional não consegue simular realisticamente os processos de fraturamento tridimensionais.

- O gasto computacional na aplicação prática de estruturas usuais é muito alto, exigindo-se uma enorme memória computacional para armazenar e analisar os dados.

2.2.2 Modelo de fissuração discreta

No modelo de fissuração discreta, como apresentado na figura 2.3, a malha de elementos finitos é desconectada nos nós onde ocorre a fissura. Assim que um nó é separado, uma carga limite é transferida entre os dois nós. A conexão entre os dois nós pode ser comparada a um elemento de mola com uma rigidez, dependendo da distância entre os dois nós.

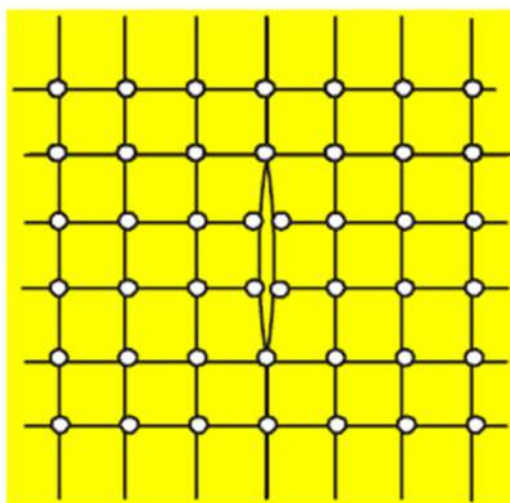


Figura 2.3 - Modelo de fissuras discretas. (BITTENCOURT, 1999)

Segundo BITTENCOURT (1999), nessa abordagem há basicamente três problemas a serem resolvidos:

- Determinar a zona de localização e a direção da fissura inicial;
- Determinar como a fissura se propaga;
- Determinar a direção de propagação da fissura.

O primeiro modelo, feito por Ngo e Scordelis (1967), via elementos finitos, é simples e a quantidade, localização e geometria das fissuras devem ser preestabelecidas. O concreto e o aço são representados por elementos triangulares bidimensionais, tendo a relação tensão-deformação lineares.

A aderência entre o concreto e a armadura é levada em consideração através dos elementos de interface espaçados ao longo do comprimento da barra de aço.

Esses elementos são constituídos conceitualmente por duas molas lineares ortogonais entre si, não possuindo dimensão física, apenas suas propriedades mecânicas são importantes. As fissuras são representadas simplesmente separando os elementos de concreto em cada lado da fissura.

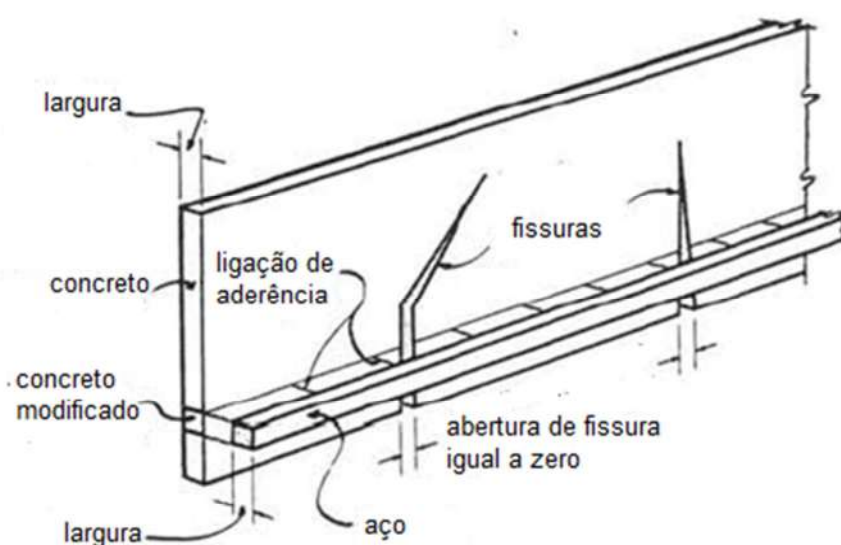


Figura 2.4 - Modelo analítico idealizado por Ngo e Scordelis. (Adaptado de NGO e SCORDELIS, 1967)

Segundo D'AVILA (2003), em 1967, NILSON (1968) modelou a propagação de fissuras discretas em vigas de concreto armado, considerando a aderência parcial entre o concreto e a armadura. A propagação das fissuras é feita através de uma redefinição de malha manual.

A estrutura intacta é carregada até que o critério de fissuração seja excedido em pelo menos um ponto. A execução do programa é interrompida para uma análise visual dos resultados, se as tensões principais de tração em dois elementos adjacentes excedem a resistência à tração do concreto, então uma fissura é definida ao longo do contorno comum dos dois elementos. Ao longo da fissura, são criados dois pontos nodais desconectados onde inicialmente existia apenas um.

A nova estrutura fissurada definida é então recarregada a partir de zero, até que o critério de ruptura seja excedido novamente. Modela-se a extensão da fissura e a estrutura é novamente carregada e assim sucessivamente.

Depois de algum tempo, verificou-se que o concreto não rompe de uma forma totalmente frágil e isso foi observado pelos resultados dos estudos realizados.

Esses estudos indicavam que era possível obter melhores resultados considerando um comportamento de amolecimento do concreto após a tensão máxima ter sido atingida. Assim levando ao desenvolvimento de modelos de elementos finitos baseados na Mecânica da Fratura não linear para representar a fissuração discreta.

O modelo proposto por Hillerborg, Modéer e Peterson (1976) e Hillerborg (1980) é um desses modelos que levam em conta a Mecânica da Fratura. Esse modelo propõe que a zona de processo de fratura é caracterizada por uma curva tensão normal x abertura de fissura, sendo considerada uma propriedade do material estudado.

Mais recentemente, Soprano e Cernuschi (2000) apresentaram um modelo de fissura coesiva para a determinação da resistência à flexão de vigas de concreto simples. O material não fissurado tem comportamento elástico linear.

A fissura se forma em um ponto quando a tensão principal máxima atinge a resistência à tração do concreto. Para representar o comportamento da fissura foram utilizados elementos de molas não lineares de dois nós. O diagrama de amolecimento adotado é multilinear.

Segundo Bittencourt (1999), a principal vantagem da abordagem discreta é que ela modela realisticamente o processo de fraturamento. Os efeitos com a ancoragem do aço no concreto e as restrições impostas pelos agregados nos deslocamentos por cisalhamento podem ser consideradas de modo mais natural.

As desvantagens são que o modelo exige uma constante modificação na topologia da malha e é necessária uma reestruturação do sistema de equações e uma completa reavaliação no campo de tensões e deformações, em função das alterações feitas na malha.

Vale salientar que a utilização desse modelo é limitada a peças de concreto simples, peças subarmadas e estruturas com grande massa de concreto, pois a modelagem não consegue ser feita em peças estruturais que possam ter múltiplas fissuras.

2.2.3 Modelo de fissuração distribuída

O fraturamento do concreto é considerado como uma faixa de microfissuras distribuídas sobre um elemento finito no modelo de fissuração distribuída.

A matriz de rigidez é reduzida a uma matriz ortotrópica quando um elemento é fissurado, assim a rigidez na direção principal de tração se reduzirá a zero gradualmente. (Rots, 1993)

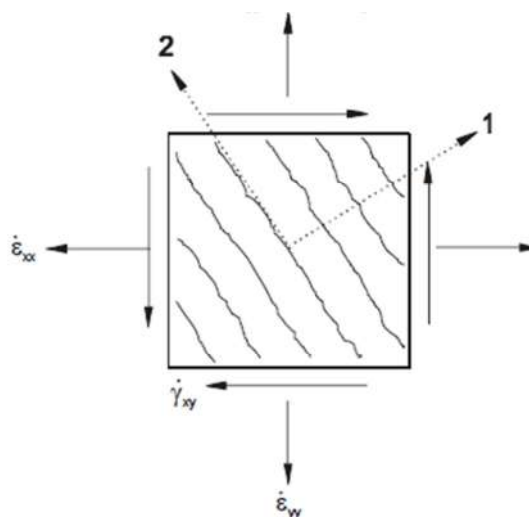


Figura 2.5 - Abordagem de fissuras distribuídas. (BITTENCOURT, 1999)

Para que os resultados não sejam significativamente influenciados pelo tamanho e orientação da malha, utiliza-se o modelo de faixas de fissuras de Bazant, conhecido internacionalmente como “*Crack Band Method*”.

Segundo Bittencourt (1999), no modelo de faixa de fissuras de Bazant, a fissuração do concreto é esquematizada com uma faixa de microfissuras em frente a uma ponta de fissura de tensão livre, como mostrado na figura 2.6.

Em geral, é sugerido utilizar uma largura da faixa de fissuras de três vezes o máximo tamanho do agregado.

Uma zona de microfissuras de largura real é relacionada ao máximo tamanho dos agregados, um pouco diferente da definição da zona de fraturamento coesivo do modelo de fissura fictícia.

Então o comportamento da tensão de tração do material, nesse caso, o concreto, de acordo com o modelo de faixa de fissuras de Bazant, é dado por uma relação bilinear da tensão-deformação, como apresentado na figura 2.6.

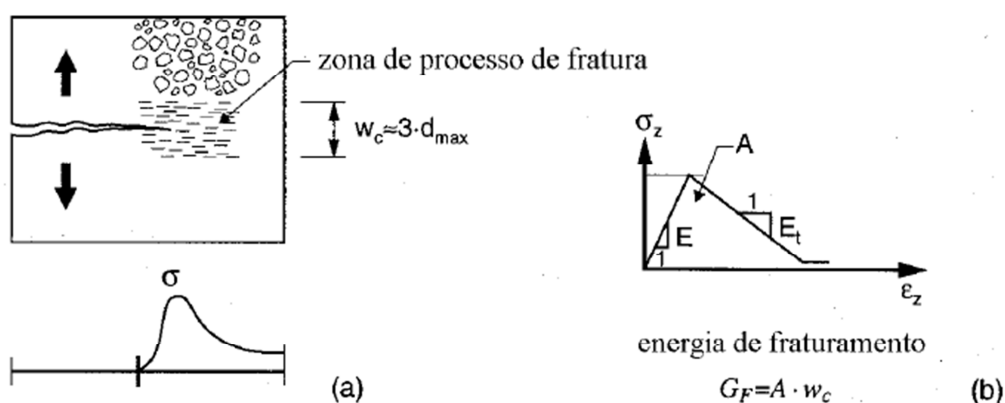


Figura 2.6 - Principais características do modelo de faixa de fissura. (BITTENCOURT, 1999)

A inclinação do ramo ascendente é relacionada ao módulo de elasticidade do material íntegro, enquanto a inclinação do ramo descendente é indicada como o módulo de amolecimento de deformações (E_t), assumindo ser função de três parâmetros: a energia de fraturamento (G_F), a resistência a tração do material (f_t) e a abertura crítica da fissura (w_c). Assim, a energia de fraturamento é definida como a área sob o diagrama bilinear multiplicada pela largura da faixa de fissuras.

Dessa forma, uma real fissura discreta é simulada pela faixa das deformações localizadas, como ilustrado na figura 2.7.

Devido à formulação da energia, esse modelo é objetivo e sua dependência com o tamanho dos elementos finitos é substancialmente reduzida, como citado anteriormente.

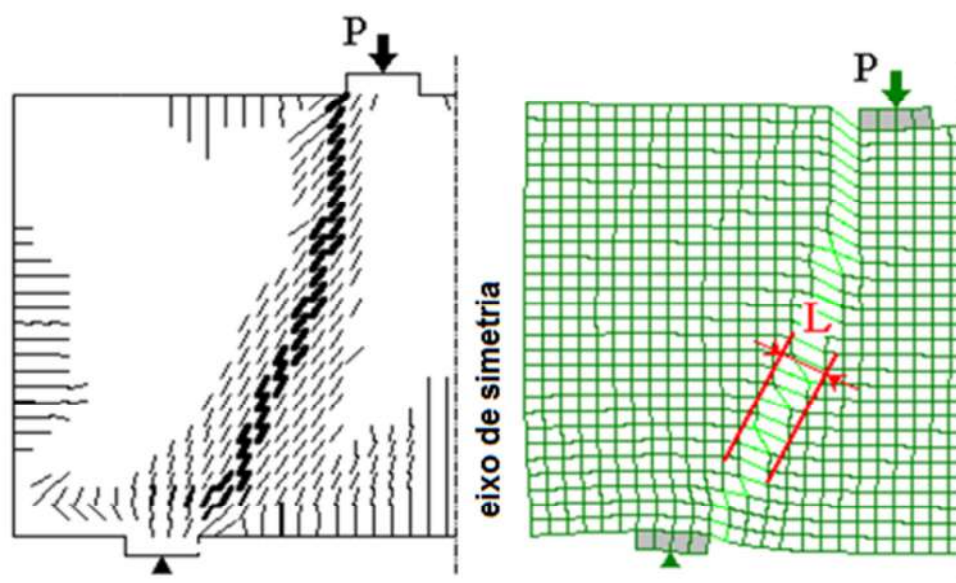


Figura 2.7 - Exemplo do modelo de faixas de Bazant em uma viga-parede. (CERVENKA; CERVENKA; PUKL, 2002)

Existem dois tipos de modelo de fissuração distribuída, o modelo de fissura fixa e o modelo de fissura rotacional. No modelo de fissura fixa, a direção da fissura é determinada e fixada no instante em que é iniciada a fissuração. No modelo de fissura rotacional, a direção da fissura é idêntica com a direção principal das tensões e a rotação acontece quando muda a direção da deformação.

A principal diferença nesses dois modelos de fissura é a falta de tensão de cisalhamento no plano da fissura no modelo de fissura rotacional, porque o eixo principal das deformações coincide com a orientação da fissura, o que torna o modelo de fissura rotacional mais simples. No modelo de fissura fixa, a resistência ao cisalhamento da fissura é simulada por um fator chamado “fator de retenção de cisalhamento”, que reflete o efeito de engrenamento entre o agregado do concreto fissurado.

Segundo Bittencourt (1999), as vantagens da abordagem do modelo de fissuração distribuída são:

- Não se faz necessária a alteração da topologia da malha, o que harmoniza com a própria natureza do Método dos Elementos Finitos;
- A necessidade da rotação dos eixos principais durante a análise pode ser admitida.

No entanto, o modelo de fissura distribuída tem suas desvantagens:

- Não é capaz de modelar a superfície de fratura;

- Dependendo do critério adotado, o processo de análise fica dependente da malha utilizada.

3 MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS À ANÁLISE NÃO LINEAR

Neste capítulo, apresenta-se a utilização do método dos elementos finitos e o tipo de solução não linear utilizada.

3.1 Introdução

Atualmente, o objetivo de um programa de elementos finitos é simular o comportamento das estruturas próximo da realidade. Esse comportamento é obtido baseado nos princípios da mecânica para qualquer forma geométrica, propriedades dos materiais e carregamentos, criando uma ferramenta mais geral e complexa do que uma simples fórmula.

A análise não linear foi criada para ajudar no desenvolvimento de novas técnicas para soluções de ancoragens, tipos de carregamentos especiais e na investigação de casos de ruptura da estrutura. Não foi criada para ser usada no dimensionamento das estruturas nos escritórios, o qual usa fórmulas mais simples para o dimensionamento da mesma.

Um algoritmo para uma análise não linear é baseado em três partes básicas: o método dos elementos finitos, o modelo constitutivo dos materiais e um método de solução não linear. (CERVENKA; CERVENKA; PUKL, 2002)

3.2 Modelo de elementos finitos para o concreto armado

3.2.1 Introdução

A modelagem de elementos finitos para estruturas de concreto armado demanda uma modelagem especial devido à armação existente no concreto armado. A maioria desses modelos é apresentada nas figuras 3.1 e 3.2, para duas e três dimensões, respectivamente.

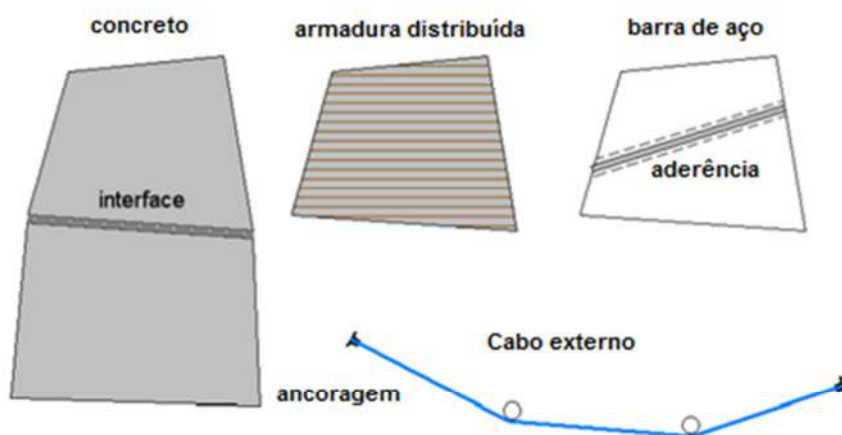


Figura 3.1 - Elementos de duas dimensões para representação do concreto armado. (CERVENKA; CERVENKA; PUKL, 2002)

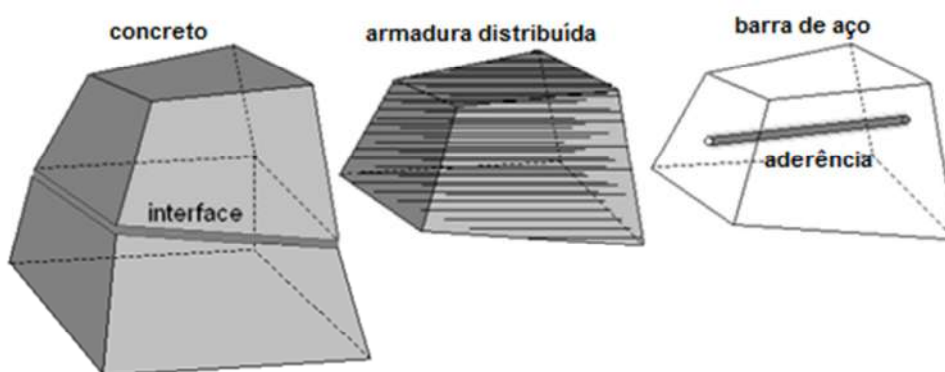


Figura 3.2 - Elementos de três dimensões para representação do concreto armado. (CERVENKA; CERVENKA; PUKL, 2002)

O concreto é modelado por elementos planos e sólidos, como exemplo temos o elemento quadrilátero para duas dimensões e o elemento de tijolo para três dimensões, como mostrados nas figuras acima.

Por se tratar de uma análise não linear, são utilizados elementos de baixa ordem para que seja mais rápida a convergência do modelo.

No caso da armação distribuída, os elementos de barras individuais não são considerados, enquanto a armação distribuída é considerada como uma componente de um material compósito.

Barras de aço individuais podem ser modeladas por elementos de barras incorporadas ao elemento de concreto com somente rigidez axial. Nessa técnica a malha é gerada primeiramente para o concreto, então o elemento de barra é incorporado à malha gerada. O elemento de barra pode ser considerado como

qualquer outro elemento, mas seus nós estão cinematicamente dependente aos nós do concreto.

3.2.2 Modelo para o concreto

O modelo de elementos finitos utilizado para simular o comportamento do concreto não fissurado ou com fissuração distribuída é o modelo padrão para o estado plano de tensões com solução em deslocamentos, largamente empregado em análise não linear de estruturas de concreto armado.

3.2.2.1 Representação no ATENA

O concreto é representado no ATENA, na modelagem em duas dimensões, pelo elemento quadrilateral plano, que são elementos isoparamétricos integrados pela integração de Gauss utilizando quatro a nove pontos de integração no caso de interpolação bi linear ou bi quadrática, denominado no programa de CCIsoQuad<....>.

A geometria e a função de interpolação dos elementos são apresentadas na figura 3.3 e na tabela 3.1.

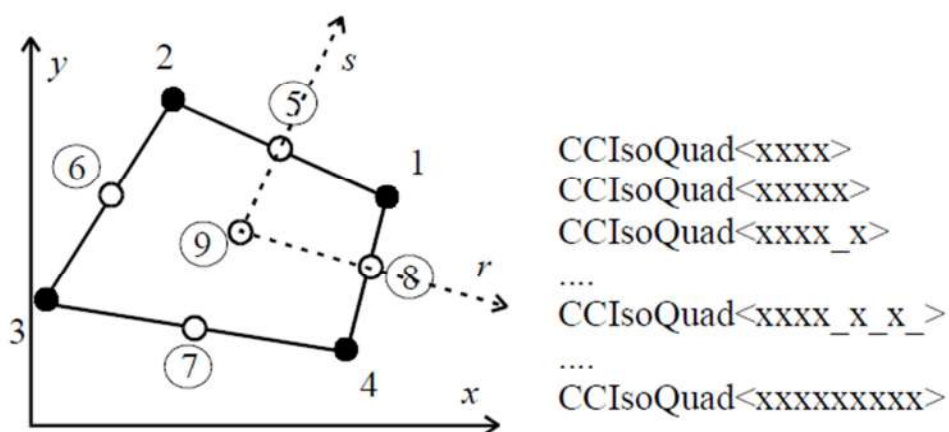


Figura 3.3 - Geometria do elementos CCIsoQuad<....>. (CERVENKA, 2009)

Nota-se que a quantidade de x que aparece depois do nome representa a quantidade de nós que o elemento possui.

Tabela 3.1 - Função de interpolação dos elementos CCIsoQuad<....>. (CERVENKA, 2009)

Nó i	Função h_i	Somente incluído se o nó i é definido				
		$i = 5$	$I = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
1	$\frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$			$-\frac{1}{2}h_8$	$\frac{1}{4}h_9$
2	$\frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_6$			$\frac{1}{4}h_9$
3	$\frac{1}{4}(1-r)(1-s)$		$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{2}h_7$		$\frac{1}{4}h_9$
4	$\frac{1}{4}(1+r)(1-s)$			$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_8$	$\frac{1}{4}h_9$
5	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
6	$\frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$					$-\frac{1}{2}h_9$
7	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
8	$\frac{1}{2}(1+r)(1-s^2)$					$-\frac{1}{2}h_9$
9	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s^2)$					

Para a modelagem em 3D, os elementos finitos do ATENA utilizados serão os elementos sólidos 3D, mais especificadamente o elemento CCIsoBrick<....>.

A geometria e a função de interpolação dos elementos são apresentadas na figura 3.3 e na tabela 3.1.

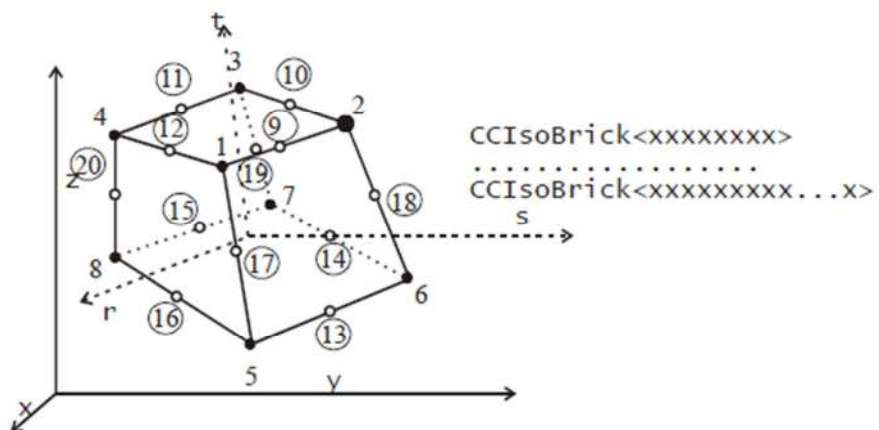


Figura 3.4 - Geometria dos elementos CCIsoBrick<....>. (CERVENKA, 2009)

Nota-se que a quantidade de x que aparece entre o sinal representa a quantidade de nós que o elemento possui.

Tabela 3.2 - Função de interpolação dos elementos CCIsoBrick<....>. (CERVENKA, 2009)

Node i	Function h_i	Include only if node i is defined										
		$i=9$	$i=10$	$i=11$	$i=12$	$i=13$	$i=14$	$i=15$	$i=16$	$i=17$	$i=18$	$i=19$
1	$\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$	$-\frac{1}{2}h_9$			$-\frac{1}{2}h_{12}$					$\frac{1}{2}h_{17}$		
2	$\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$	$-\frac{1}{2}h_9$	$-\frac{1}{2}h_{10}$								$-\frac{1}{2}h_{18}$	
3	$\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$		$-\frac{1}{2}h_{10}$	$-\frac{1}{2}h_{11}$								$\frac{1}{2}h_{19}$
4	$\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$			$-\frac{1}{2}h_{11}$	$-\frac{1}{2}h_{12}$							$\frac{1}{2}h_{20}$
5	$\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$					$-\frac{1}{2}h_{13}$			$\frac{1}{2}h_{16}$	$-\frac{1}{2}h_{17}$		
6	$\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$					$-\frac{1}{2}h_{13}$	$\frac{1}{2}h_{14}$				$-\frac{1}{2}h_{18}$	
7	$\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$						$\frac{1}{2}h_{14}$	$-\frac{1}{2}h_{15}$				$\frac{1}{2}h_{19}$
8	$\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$							$-\frac{1}{2}h_{15}$	$-\frac{1}{2}h_{16}$			$-\frac{1}{2}h_{20}$
9	$\frac{1}{4}(1-r^2)(1+s)(1+t)$											

3.2.3 Modelo para barra de aço

O modelo utilizado para simular o comportamento das barras de aço da armadura é o modelo chamado de barra incorporada.

Esse modelo baseia-se no fato de que a armadura resiste apenas a tensões axiais em sua direção longitudinal e que os deslocamentos de um ponto qualquer da barra são iguais aos do elemento de concreto no qual está embebida.

Dessa forma, as barras da armadura contribuem apenas para a rigidez no sentido longitudinal e podem ser dispostas dentro do elemento de concreto de forma arbitrária, não introduzindo novas incógnitas no problema. (D'AVILA, 2003)

Os deslocamentos ao longo da barra são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos adjacentes de concreto. Assim, a matriz de rigidez da armadura, D_s , tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto, D_c , e a matriz de rigidez total é a soma das duas. A matriz resultante, D , de rigidez de elemento de concreto armado é obtida da seguinte forma:

$$D = D_c + \sum_i^n D_{si} \quad (3.1)$$

Sendo n o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento representando o concreto. Utilizando a formulação do método dos elementos finitos, a matriz de rigidez para a barra de armadura é expressa por:

$$D_s = E_s A_s \int_S B_s B_s^T dS \quad (3.2)$$

Sendo E_s o módulo de deformação longitudinal do aço, A_s a área da seção transversal da barra de armadura, B_s o vetor da relação linear ou não linear deformação-deslocamento para a armadura e S é o comprimento da barra.

Nessa formulação, a localização e geometria das barras da armadura independem da malha de elementos finitos de concreto, tornando-se uma importante vantagem para a escolha dessa formulação na modelagem.

Para garantir que os segmentos de barras estão cinematicamente dependentes aos vários elementos de concreto, devido ao fato de que a armadura é locada por um conjunto de pontos independentes da malha, se faz necessária a colocação de nós adicionais nos elementos.

Esses nós devem estar localizados onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto. As coordenadas dos nós das barras de aço, entre os pontos de definição das mesmas, são obtidas por interpolação. Dessa maneira, nós adicionais são criados dentro dos elementos finitos, onde há presença de armadura.

3.2.3.1 Representação no ATENA

As barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos 2D e 3D integrados pela integração de um ou dois pontos de

integração para o caso da interpolação linear ou quadrática, respectivamente, permitindo-se modelar barras retas e curvas. No programa ATENA, esses tipos de elementos são codificados no grupo de elementos CCIsoTruss, e esses elementos são adequados para análises de problemas tanto em 2D como também em 3D. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para barras curvas, são necessários três pontos.

A geometria, as funções de interpolações e os pontos de integração desses elementos são apresentados na figura 3.3 e tabelas 3.1 e 3.2.

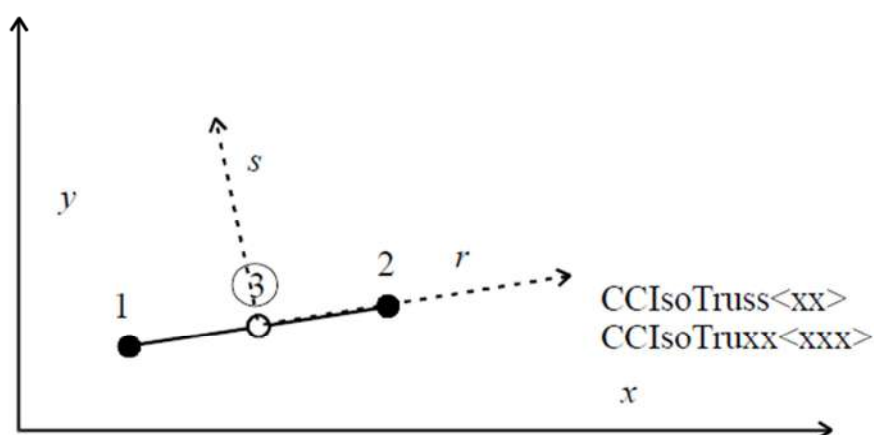


Figura 3.5 - Geometria do elemento CCIsoTruss. (ATENA, 2009)

Tabela 3.3 - funções de interpolação dos elementos CCIsoTruss. (ATENA, 2009)

Nó i	Função h_i	Somente incluído se o nó 3 é definido
1	$\frac{1}{2}(1-r)$	$-\frac{1}{2}h_3$
2	$\frac{1}{2}(1+r)$	$-\frac{1}{2}h_3$
3	$(1-r^2)$	

**Tabela 3.4 - Pontos para a integração de Gauss para elementos CCIsotruss de 2 e 3 nós.
(ATENA, 2009)**

Ponto de Integração	Coordenada r	Peso
1	0.577350269189626	1.
2	-0.577350269189626	1.

3.3 Método de solução das equações não lineares

3.3.1 Introdução

A representação do comportamento não linear de estruturas de concreto, no espaço parâmetro de carga versus deslocamentos envolve fenômenos de aumento de deslocamentos com decréscimo de cargas, ou mesmo decréscimo de deslocamentos com decréscimo de cargas, como mostram as trajetórias de equilíbrio da figura 3.6.

Na análise não linear de uma estrutura deseja-se obter as trajetórias de equilíbrio para determinados graus de liberdade da discretização.

Assim, dado um campo de deslocamentos e um fator de carga proporcional, equivalentes a um ponto da trajetória de equilíbrio, apresentado como ponto A na figura 3.6, deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio, apresentado como o ponto B na figura 3.6, de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental do ponto A ao ponto B seja controlada.

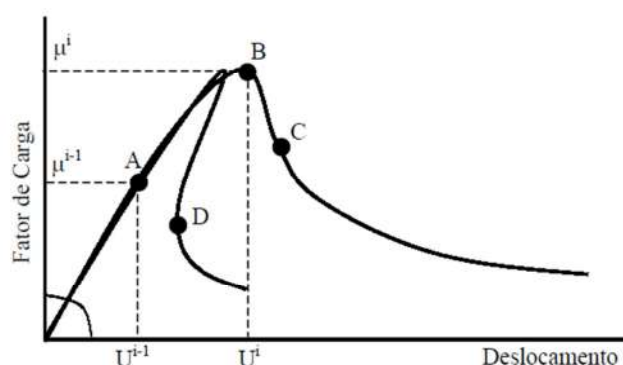


Figura 3.6 - Trajetórias de equilíbrio típicas da análise de estruturas de concreto. (SILVA, 2002)

Diferentes métodos incrementais iterativos têm sido usados para análise não linear de estruturas de concreto, destacando-se os métodos de controle de carga, de controle direto de deslocamentos, de controle de comprimento de arco e de controle de deslocamento generalizado.

Segundo BUENO (1999), o método de comprimento de arco foi desenvolvido visando problemas que necessitavam analisar a estrutura depois de se atingirem os pontos limites, como pontos de máximo e mínimo.

O Método trabalha, simultaneamente, com as $n+1$ incógnitas do sistema não linear (n deslocamentos e um parâmetro de carga). A equação adicional do sistema relaciona o fator de carga com o controle de deslocamento ou de carga. Nas figuras abaixo estão ilustradas casos clássicos de aplicação desse método de convergência.

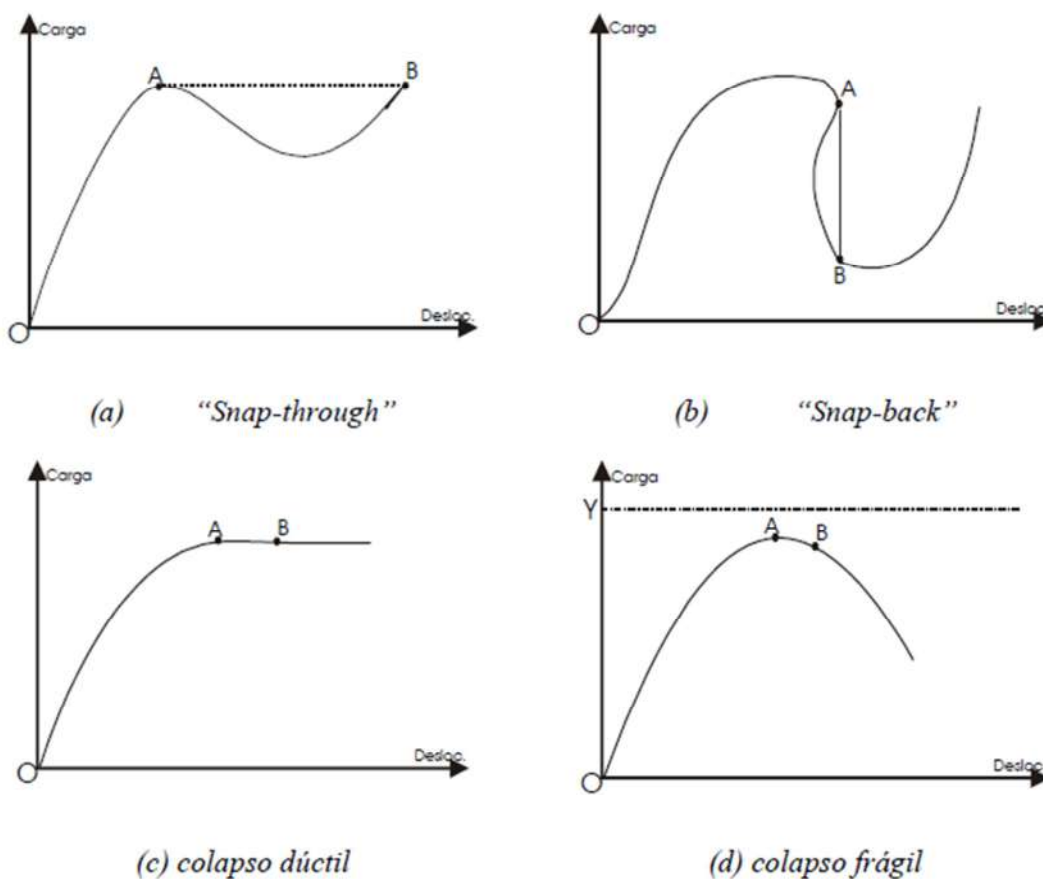


Figura 3.7 - Curvas carga versus deslocamento nas quais se aplica o método de convergência de comprimento de arco. (BUENO, 1999)

Segundo BUENO (1999), nas figuras (a) e (b) o ponto A pode corresponder a um máximo local, não significando a perda total de funcionalidade da estrutura, portanto, o estudo do comportamento da estrutura entre os pontos A e B é relevante. Em outras situações, como nas figuras (c) e (d), embora o ponto A indique o colapso estrutural, o estudo do comportamento no trecho AB é importante para estabelecer o tipo de colapso: dúctil (c) ou frágil(d).

O método de controle que deve ser empregado depende do tipo de instabilidade a ser analisada. Para curvas de carga versus deslocamento, como as das figuras (a), (c) e (d), utiliza-se controle de deslocamento. Para a curva (b), utiliza-se controle de carga e deslocamento.

3.3.2 Método incremental-iterativo

Em uma análise não linear, um processo incremental-iterativo torna-se necessário para solucionar o problema. Para esse fim, a equação de equilíbrio incremental correspondente à iteração j do passo i pode ser descrita, como segue abaixo:

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (3.1)$$

Onde:

$[K]_{j-1}^i$ é a matriz de rigidez tangente na iteração $j - 1$ do passo i , função do campo de deslocamentos $\{\delta U\}_{j-1}^i$;

$\{\delta U\}_j^i$ é o vetor deslocamentos incrementais da iteração j do passo i ;

$\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i ;

$\{P\}$ é o vetor de cargas;

$\{Q\}_{j-1}^i$ é o vetor de forças residuais da iteração $j - 1$ no passo i ;

Inicialmente, estabelece-se, em função do parâmetro de controle, um valor para o incremento do fator de carga $\delta \lambda_j$, podendo-se então obter $\{\delta U\}_j$, o qual pode ser decomposto nas parcelas associadas à carga de referência, $\{\delta U\}_j^P$, e a carga residual $\eta_{j-1} \{\delta U\}_j^Q$, na forma:

$$\{\delta U\}_j = \delta \lambda_j \cdot \{\delta U\}_j^P + \eta_{j-1} \{\delta U\}_j^Q \quad (3.2)$$

O escalar η é uma variável adicional utilizada no método “*Line-search*”. Como este método não foi usado neste trabalho essa variável é um valor adotado de um.

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^P = \{P\} \quad (3.3)$$

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^Q = \{Q\}_{j-1} \quad (3.4)$$

Ao final de cada iteração, a convergência é verificada através da magnitude do vetor de forças residuais $\{Q\}_j$ e da magnitude do vetor de deslocamentos iterativos $\{\delta U\}_j$ e

o processo iterativo continua até que determinado critério de convergência seja atendido.

Se uma nova iteração for necessária, depois de calculados $\{\delta U\}_j^P$ e $\{\delta U\}_j^Q$ utilizando-se as equações 3.3 e 3.4, o valor de $\delta\lambda_j$ deve ser obtido com uma equação de restrição que envolve combinações das grandezas do problema.

A atualização das variáveis é feita da seguinte forma:

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \delta\lambda_j \quad (3.5)$$

$$\{U\}_j = \{U\}_{j-1} + \{\delta U\}_j \quad (3.6)$$

O vetor de cargas residuais da iteração j é dado por:

$$\{Q\}_j = \lambda_j \cdot \{P\} - \{F\}_j \quad (3.7)$$

Onde $\{F\}_j$ é o vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração j .

Observa-se que, na primeira iteração de cada passo, o vetor de cargas residuais $\{Q\}_{j-1}$ é nulo.

A formulação acima descrita é completamente genérica e se aplica aos vários métodos de controle, bastando que se redefina a equação de restrição.

No método de comprimento de arco, o processo iterativo é controlado através de uma combinação geométrica entre as variáveis de deslocamento e fator de carga proporcional. A figura 3.6 ilustra o procedimento para a obtenção do ponto de equilíbrio B, a partir do ponto de equilíbrio A.

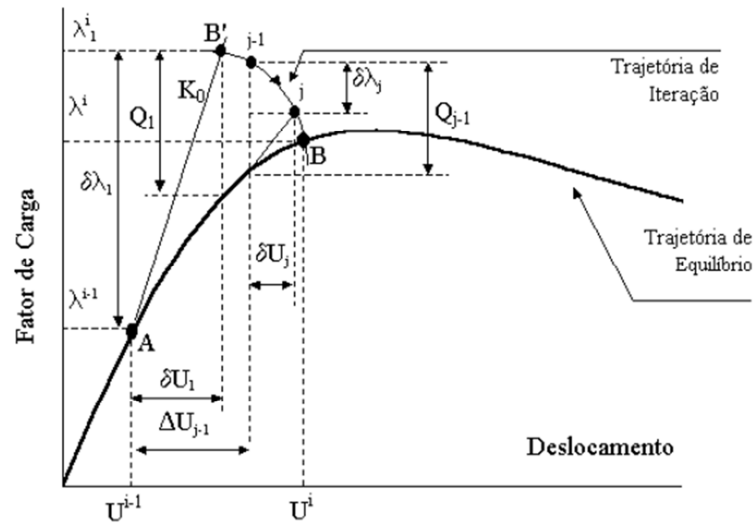


Figura 3.8 - Processo incremental-iterativo com controle de comprimento de arco. (FUINA, 2004)

Para os métodos de comprimento de arco, a seguinte combinação precisa ser controlada na primeira iteração, definindo o ponto inicial da trajetória de iteração (ponto B' da figura 3.6).

$$\{\Delta U\}_1^T \cdot \{\Delta U\}_1 + \delta \lambda_1 \cdot \delta \lambda_1 = \Delta S^2 \quad (3.8)$$

Onde ΔS é uma constante a ser controlada.

No início de cada passo incremental ($j - 1$) não haverá forças residuais, o que implica em $\{Q_{j-1}\} = \{0\}$. De acordo com a equação 3.4, o vetor de deslocamentos $\{\{\delta U\}_1^Q\}$ também se anula.

O vetor de deslocamentos incrementais para a primeira iteração pode ser obtido da equação 3.2, como:

$$\{\delta U\}_1 = \delta \lambda_1 \cdot \{\delta U\}_1^P \quad (3.9)$$

$$\{\Delta U\}_1 = \delta \lambda_1 \cdot \{\delta U\}_1^P \quad (3.10)$$

Uma vez que o vetor de deslocamentos incrementais é nulo no início do passo.

Substituindo o resultado de 3.10 na equação 3.8, obtém-se o fator de carga proporcional para a primeira iteração, como:

$$\delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^P \cdot \{\delta U\}_1^P + 1}}, \text{ para } j = 1 \quad (3.11)$$

Como se pode perceber, o sinal do fator de carga é indeterminado, portanto, outras informações precisam ser adicionadas ao processo.

O método do comprimento de arco geralmente é utilizado desprezando-se a unidade em presença do produto escalar entre os vetores de deslocamentos no denominador da equação 3.11, pois este não possui unidades físicas consistentes, resultando em:

$$\delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^P \cdot \{\delta U\}_1^P}}, \text{ para } j = 1 \quad (3.12)$$

Através da equação acima, pode-se definir o ponto inicial da trajetória de iteração, a qual deve ser percorrida $j > 1$ impondo-se restrições à sua forma. Assim, o método de comprimento de arco proposto por CRISFIELD (1983) é apresentado a seguir.

3.3.2.1 Método comprimento de arco

Este método, proposto por CRISFIELD (1983), controla a norma dos deslocamentos incrementais e é dada por:

$$\{\Delta U\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j = \Delta S^2 \quad (3.13)$$

$$\{\Delta U\}_j = \{\Delta U\}_{j-1} + \{\delta U\}_j \quad (3.14)$$

A substituição de $\{\delta U\}_j$ pela expressão dada em 3.2, na equação 3.14, e do resultado na equação 3.13 leva a uma equação de segundo grau que permite obter a incógnita $\delta\lambda_j$.

A escolha da raiz da referida equação de segundo grau, a ser adotada, é feita baseando-se no ângulo formado entre os vetores de deslocamentos incrementais das últimas iterações ($\{\Delta U\}_{j-1}$ e $\{\Delta U\}_j$) e na proximidade da raiz com a solução linear da equação de segundo grau (CRISFIELD, 1983).

4 MODELOS CONSTITUTIVOS

Segundo BITENCOURT JÚNIOR (2009), em uma teoria puramente mecânica utilizam-se equações constitutivas que relacionam as tensões atuantes num sólido num determinado instante com a configuração do sólido até aquele instante.

Numa análise envolvendo um material composto, como o concreto armado, o comportamento da estrutura é função do comportamento dos seus constituintes, da interação entre os materiais, como o aço e o concreto, do nível do carregamento, da propagação de fissuras e outros, sendo tão mais realista o modelo quanto maior o número de incógnitas peculiares ao comportamento do material for considerado.

A seguir são apresentados brevemente os modelos constitutivos utilizados para o concreto e para a barra de aço.

4.1 Modelo Constitutivo do concreto SBETA

4.1.1 Conceito do modelo constitutivo SBETA

O modelo constitutivo SBETA inclui as seguintes influências do comportamento do concreto:

- Comportamento não linear na compressão incluindo os efeitos de endurecimento e amolecimento;
- Fraturamento do concreto baseado na tensão da mecânica da fratura não linear;
- Critério de resistência biaxial;
- Redução da tensão de compressão depois de fissurado;
- Efeito do “*tension stiffening*”;
- Dois modelos de fissura distribuída: fissura fixada e fissura rotacional.

O comportamento das armaduras é considerado de forma uniaxial na direção da mesma, sua relação tensão versus deformação pode ser bi linear ou multilinear.

A matriz do material é obtida usando a aproximação elástica não linear, nessa aproximação as constantes elásticas são derivadas da função tensão versus deformação chamada pelo programa de lei uniaxial equivalente.

Essa aproximação é similar ao modelo constitutivo hipoeelástico não linear, exceto pelas leis diferentes que são usadas para carregamento e descarregamento causando a dissipação da energia para o dano do material.

4.1.2 *Resumo das tensões no modelo constitutivo SBETA*

No caso do concreto não fissurado o símbolo da tensão tem os seguintes significados:

- σ_{c1} – tensão principal máxima;
- σ_{c2} – tensão principal mínima.

Tração positiva e compressão negativa.

No caso do concreto fissurado, as tensões são definidas no plano da fissura:

- σ_{c1} – tensão normal perpendicular à fissura;
- σ_{c2} – tensão normal paralela à fissura;
- τ_c – tensão de cisalhamento no plano da fissura;

4.1.3 *Tensão, deformação e rigidez do material.*

A formulação da relação constitutiva é considerada no estado plano de tensão. Seja para as fissuras ou armaduras é considerada uma aproximação distribuída, isto é, a propriedade do material definida para um ponto material é válida para certo volume de material, o qual nesse caso é associado inteiramente com o elemento finito.

O modelo constitutivo é baseado na rigidez e é descrito pelas equações de equilíbrio num ponto material:

$$s = De, s = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T, e = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \quad (4.1)$$

Onde:

- **s** – o vetor tensão;
- **D** – a matriz de rigidez do material;
- **e** – o vetor deslocamento.

O vetor tensão é composto por componentes da tensão do estado plano de tensão, como apresentado na Figura 4.1.

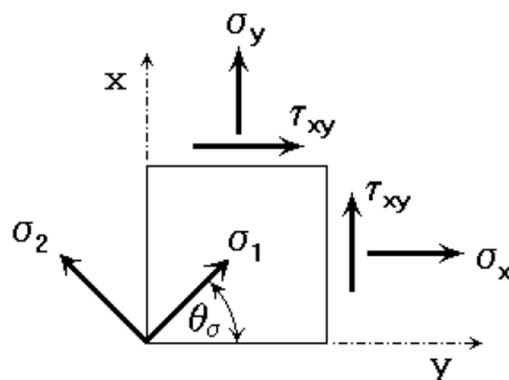


Figura 4.1 - Componentes de tensões do estado plano de tensão. (CERVENKA, 2009)

O vetor deformação é composto por componentes de deformação do estado plano de tensão, como mostrado na Figura 4.2, onde γ_{xy} é o ângulo de distorção.

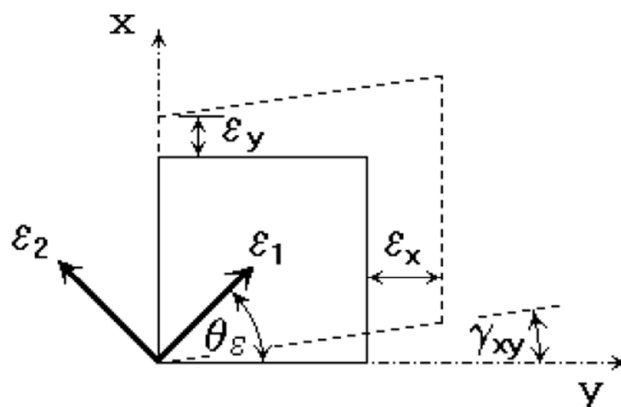


Figura 4.2 - Componentes de deformações do estado plano de tensão. (CERVENKA, 2009)

As deformações são comuns para todos os materiais, o vetor tensão e a matriz de rigidez podem ser decompostos de acordo com os materiais, nesse caso o concreto e a barra de aço como:

$$s = s_c + s_s, D = D_c + D_s \quad (4.2)$$

O vetor tensão e ambas as decomposições do vetor tensão s_c , s_s tem relação com a área total da seção transversal. A tensão do concreto s_c está atuando na área do material de concreto A_c .

A matriz D tem a forma da lei de Hooke seja para o material isotrópico ou ortotrópico, como será apresentado mais adiante.

O vetor tensão das barras de aço s_s é a somatória de todos os componentes das armaduras, como mostra a formula abaixo.

$$s_s = \sum_{i=1}^n s_{si} \quad (4.3)$$

Onde n é o número de componentes de armadura distribuída. Para a i ésima armadura, a componente global do vetor tensão s_{si} tem relação com a tensão da barra local pela transformação:

$$s_{si} = T_\sigma p_i \sigma'_{si} \quad (4.4)$$

Onde p_i é a taxa de armadura $p_i = \frac{A_{si}}{A_c}$, A_{si} é a bitola da barra de aço. A tensão local da armadura σ_{si} está atuando na bitola da armação.

Os vetores tensão e deformação são transformados de acordo com as equações, apresentados abaixo, no estado plano de tensão. Os novos eixos u, v são rotacionados dos eixos globais x, y por um ângulo α . O ângulo α é positivo no sentido anti-horário como mostra a Figura 4.3.

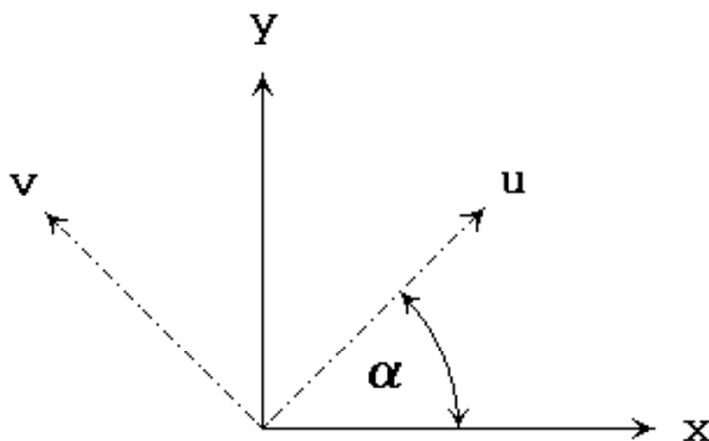


Figura 4.3 - Rotação dos eixos. (CERVENKA, 2009)

A transformação das tensões fica:

$$s_{(u)} = T_\sigma s_{(x)} \quad (4.5)$$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha)^2 & 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 & -2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$s_{(u)} = \{\sigma_u, \sigma_v, \tau_{uv}\}^T, s_{(x)} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \quad (4.7)$$

A transformação das deformações fica:

$$e_{(u)} = T_\varepsilon e_{(x)} \quad (4.8)$$

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 & -\cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ -2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) & 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$e_{(u)} = \{\varepsilon_u, \varepsilon_v, \gamma_{uv}\}^T, e_{(x)} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \quad (4.10)$$

Os ângulos dos eixos principais das tensões e deformações, como apresentado na Figura 4.1 e Figura 4.2, são encontrados utilizando as seguintes equações:

$$\tan(2\vartheta_\sigma) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \tan(2\vartheta_\varepsilon) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (4.11)$$

Onde ϑ_σ é o ângulo do primeiro eixo principal das tensões e ϑ_ε é o ângulo do primeiro principal eixo das deformações.

No caso de um material isotrópico, isto é, concreto não está fissurado, as direções principais das tensões e deformações são idênticas. No case de um material ortotrópico, isto é, concreto com fissuras, os eixos principais vão ser diferentes.

A convenção de sinais para a tensão normal, neste programa, é positiva para valores de tensão de tração ou deformação e negativo para valores de tensão de compressão ou deformações. A tensão de cisalhamento é positiva quando tem o sentido anti-horário, como uma força atuando para cima na face direita de um elemento.

4.1.4 Relação tensão x deformação do concreto

4.1.4.1 Lei equivalente uniaxial

O comportamento não linear do concreto no estado biaxial de tensão é descrito pela tensão efetiva σ_c^{ef} e o uniaxial equivalente da deformação ε^{eq} . A tensão efetiva é, nas maiorias dos casos, a tensão principal.

A deformação uniaxial equivalente é introduzida para eliminar o efeito Poisson no estado plano de tensão.

$$\varepsilon^{eq} = \frac{\sigma_{ci}}{E_{ci}} \quad (4.11)$$

A deformação uniaxial equivalente pode ser considerada como a deformação que é obtida pela tensão σ_{ci} num teste uniaxial, com módulo E_{ci} associado a direção i . Com essa hipótese, a não linearidade representando o dano é causada somente pela tensão σ_{ci} .

O diagrama tensão versus deformação uniaxial equivalente completo para o concreto é apresentado na Figura 4.4.

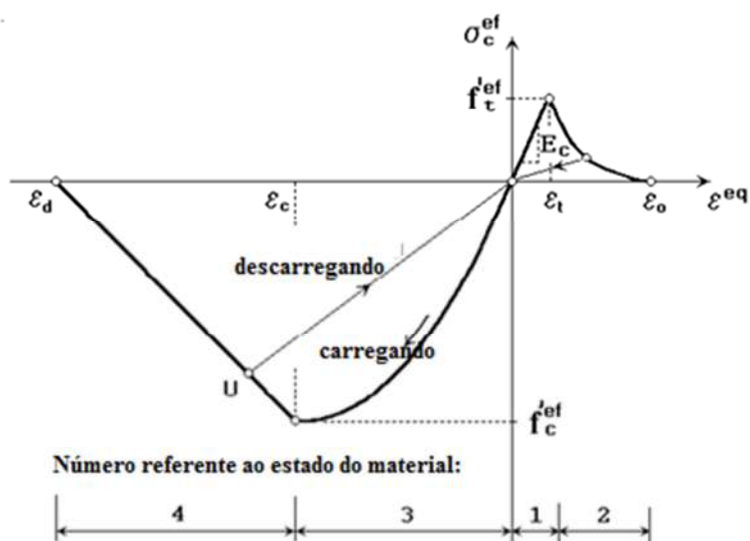


Figura 4.4 - Lei tensão x deformação uniaxial para o concreto. (Adaptado de CERVENKA, 2009)

A divisão no diagrama na Figura 4.4 é usada nas análises dos resultados para indicar o estado de dano do concreto.

O descarregamento é uma função linear até a origem. Um exemplo de descarregamento é visto no ponto U do diagrama da Figura 4.4. Então a relação entre tensão σ_c^{ef} e deformação ε^{eq} não é única e depende do histórico de carregamento. Se uma mudança ocorre no carregamento e descarregamento, o incremento da deformação efetiva muda o sinal. Se o carregamento subsequente

ocorrer na parte linear do diagrama, é seguido até o ultimo carregamento e o ponto U é alcançado de novo.

O valor pico da tensão na compressão $f'_c{}^{ef}$ e a tensão $f'_t{}^{ef}$ são calculados de acordo com estado de tensão biaxial que será apresentado mais adiante. Logo a lei tensão versus deformação uniaxial reflete o estado de tensão biaxial.

Acima foi definida a relação tensão versus deformação que é usada para calcular o módulo de elasticidade para a matriz de rigidez de certo material. Assim o módulo secante é calculado como:

$$E_c^s = \frac{\sigma_c}{\varepsilon^{eq}} \quad (4.12)$$

É usada a equação constitutiva para calcular as tensões para um dado estado de tensões.

O modulo tangente E_c^t é usado na matriz do material \mathbf{D}_c para a construção da matriz de rigidez do elemento para a solução iterativa. O modulo tangente é declividade da curva tensão x deformação numa determinada deformação e é sempre positivo. Em casos em que a declividade da curva é menos que o mínimo valor E_{min}^t , o valor do modulo tangente é $E_c^t = E_{min}^t$. Isso ocorre no domínio do amolecimento e próximo ao pico de compressão.

4.1.4.2 Concreto não fissurado

O comportamento das tensões no concreto sem fissuras é assumido como elástico linear. E_c é o modulo de elasticidade inicial do concreto, $f'_t{}^{ef}$ é força de tração efetiva derivada da função de ruptura biaxial.

$$\sigma_c^{ef} = E_c \varepsilon^{eq}, 0 \leq \sigma_c \leq f'_t{}^{ef} \quad (4.13)$$

4.1.4.3 Concreto fissurado

Um modelo de fissura fictícia baseado na lei de abertura de fissura e energia de fratura é usado quando o concreto está fissurado. Essa formulação é adequada para a modelagem que possua propagação de fissura no concreto e é usada em

combinação com o modelo de faixas de Bazant. Neste trabalho será usada a função exponencial de abertura de fissura, como apresentado na Figura 4.5.

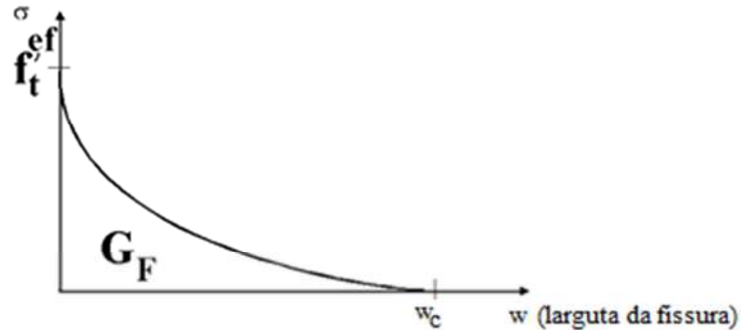


Figura 4.5 - Curva exponencial de abertura de fissura. (Adaptado de CERVENKA; CERVENKA; PUKL, 2002).

Essa função de abertura de fissura foi obtida experimentalmente por HORDIJK (1991). Onde a equação é escrita como:

$$\frac{\sigma}{f_t^{ef}} = \left\{ 1 + \left(c \frac{w}{w_c} \right)^3 \right\} \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2), \quad (4.14)$$

$$w_c = 5.14 \frac{G_f}{f_t^{ef}} \quad (4.15)$$

Onde:

- w – abertura de fissura;
- w_c – abertura de fissura onde a tensão é zerada;
- σ – tensão normal na fissura;
- c_1 – constante cujo valor é 3;
- c_2 – constante cujo valor é 6,93;
- G_f – área do gráfico que representa a energia de fratura necessária para que a fissura esteja livre de tensão;
- f_t^{ef} – força de tração efetiva derivada da função de ruptura na equação 4.14;

A abertura da fissura w é obtida através das deformações de acordo com o método das faixas de Bazant apresentado pela equação 3.18.

4.1.4.4 Compressão sem esmagamento do concreto

A fórmula recomendada pela CEB-FIP Model Code 90 adotada para o ramo ascendente da função tensão versus deformação do concreto na compressão de acordo com a equação 4.15, a Figura 4.6 apresenta a forma do gráfico obtido pela equação. Essa fórmula engloba uma vasta gama de curvas, de linear a curva e é apropriado para concreto usual ou de alto desempenho.

$$\sigma_c^{ef} = f_c'^{ef} \frac{kx - x^2}{1 + (k-2)x}, x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}, k = \frac{E_0}{E_c} \quad (4.16)$$

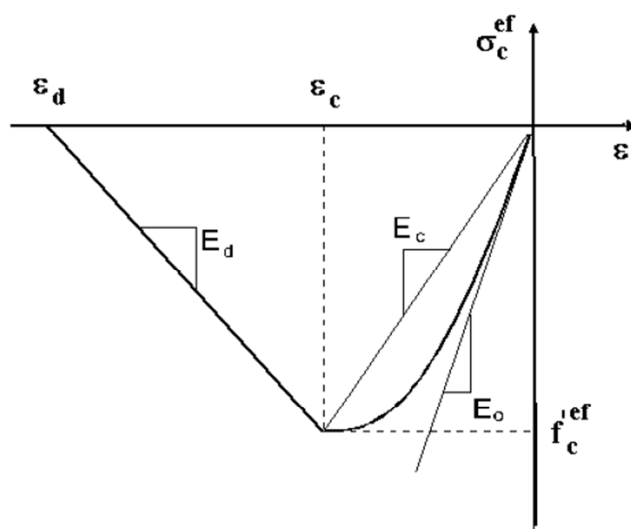


Figura 4.6 - Diagrama tensão versus deformação na compressão. (CERVENKA, 2009).

Os símbolos acima:

- σ_c^{ef} – tensão de compressão do concreto;
- $f_c'^{ef}$ – força efetiva de compressão do concreto;
- x – deformação normalizada;
- ε – deformação;
- ε_c – deformação na tensão $f_c'^{ef}$ pico;
- k – parâmetro de forma;
- E_0 – Modulo de elasticidade inicial;
- E_c – Modulo de elasticidade secante na tensão pico.

O parâmetro k pode ter qualquer valor positivo maior do que 1.

Como consequência da hipótese acima, o dano distribuído é considerado antes tensão pico seja alcançada, ao contrário do dano local que é considerado depois da tensão de pico.

4.1.4.5 Compressão com esmagamento do concreto

A lei de amolecimento para a compressão é linearizada. O modelo do plano de compressão fictício assume que o esmagamento devido à compressão é localizado num plano normal a direção da tensão principal de compressão. Todo o deslocamento pós-pico e a dissipação da energia estão localizados nesse plano. É assumido que esses deslocamentos são independentes do tamanho da estrutura. Essa hipótese foi confirmada nas experiências conduzidas por MIER (1986).

Essa hipótese é análoga a teoria da fissura fictícia para as tensões, onde a forma da lei de abertura de fissura e a energia de fratura são definidas e é considerada uma propriedade do material.

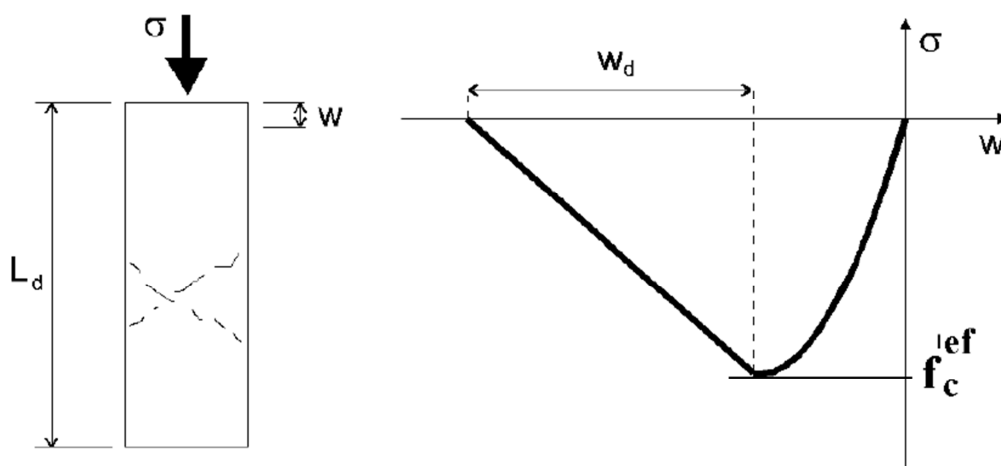


Figura 4.7 - Curva tensão efetiva versus deslocamento na compressão. (CERVENKA, 2009).

No caso da compressão, o ponto final da curva de amolecimento é definido pela deformação plástica, chamada de w_d . Dessa maneira, a energia necessária para a geração de uma área unitária do plano de fratura é definida indiretamente. Pelos experimentos de MIER (1986), o valor de w_d é igual a 0,5mm para o concreto, esse valor é adotado automaticamente pelo programa caso o usuário não entre com esse valor.

A lei de amolecimento é transformada do plano de ruptura fictícia para uma relação tensão versus deformação válida para o correspondente volume de um material

contínuo. A tangente da parte de amolecimento do diagrama tensão versus deformação é definida por dois pontos: o pico do diagrama na tensão máxima e o limite da deformação de compressão ε_d no eixo quando a tensão é zero. Essa deformação é calculada do deslocamento plástico w_d e a largura da faixa L'_d , de acordo com a expressão:

$$\varepsilon_d = \varepsilon_c + \frac{w_d}{L'_d} \quad (4.17)$$

A vantagem dessa formulação é a redução da dependência da malha de elementos finitos.

4.1.5 Controle das deformações localizadas na ruptura

É uma região ou faixa do material, a qual representa um plano de ruptura discreto na análise de elementos finitos. No caso da tração seria uma fissura, no caso da compressão seria o esmagamento do concreto. Na realidade essas regiões de ruptura possuem dimensões.

Entretanto, de acordo com experimentos, a dimensão dessas regiões de ruptura é independente do tamanho da estrutura, a dimensão é assumida como um plano fictício. Em caso de fissuras de tração, essa aproximação é conhecida como método das faixas de Bazant. Também é usado o mesmo conceito na ruptura a compressão. O propósito do método é reduzir duas deficiências que são a influência do tamanho da malha e a orientação da malha nos resultados.

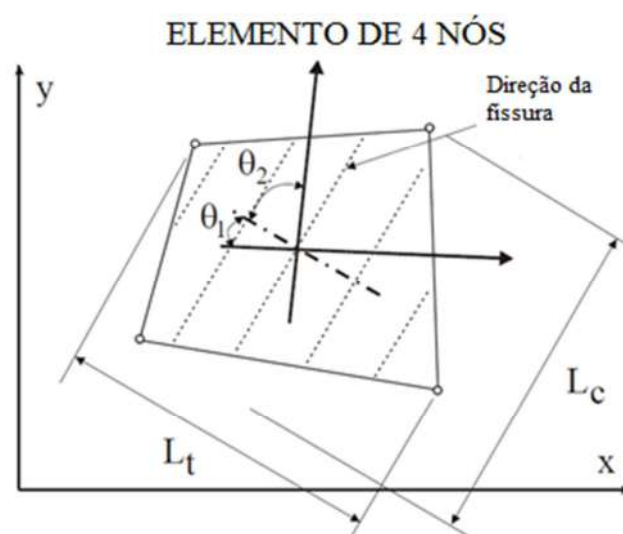


Figura 4.8 - Definição da localização da faixa. (Adaptado de CERVENKA, 2009).

4.1.5.1 Efeito do tamanho do elemento

A direção do plano de ruptura é, pela hipótese, normal as tensões principais de tração e compressão, respectivamente. A faixa de ruptura, no caso de tração é L_t e para compressão é L_d , são definidos como projeções das dimensões dos elementos finitos no plano de ruptura, como mostrado na Figura 4.8.

4.1.5.2 Efeito da direção do elemento

O efeito da orientação do elemento é reduzido, pelo aumento da faixa de ruptura para malhas obliquas, pela seguinte formula proposta por CERVENKA ET AL. (1995):

$$L'_t = \gamma L_t, L'_d = \gamma L_d \quad (4.18)$$

$$\gamma = 1 + (\gamma^{\max} - 1) \frac{\theta}{45}, \theta \in (0; 45) \quad (4.19)$$

O ângulo θ é o menor valor entre os ângulos θ_1 e θ_2 , como mostrado na Figura 4.8. A formula acima é a interpolação linear entre o valor 1,0, para a direção paralela com o lado do elemento, e γ^{\max} , para a inclinação $t = 45^\circ$. O valor recomendado para γ^{\max} é de 1,5.

4.1.6 Processo de fraturamento

O processo de formação de fissura pode ser dividido em três etapas, como apresentado na Figura 4.9.

O estágio sem fissura é antes de alcançar a tensão de tração f_t^{ef} . Quando acontece a fissuração é o estágio da zona de processo de uma fissura potencial com a diminuição da tensão de tração na face da fissura. Finalmente, depois que abertura de fissura é grande que a tensão de tração é igual a zero.

A abertura de fissura w é calculada como o deslocamento total da abertura da fissura junto com o método das faixas de Bazant.

$$w = \varepsilon_{cr} L'_t \quad (4.20)$$

Onde ε_{cr} é a deformação de abertura de fissura, o qual é igual a deformação normal a direção da fissura no estágio fissurado que não possui tensão.

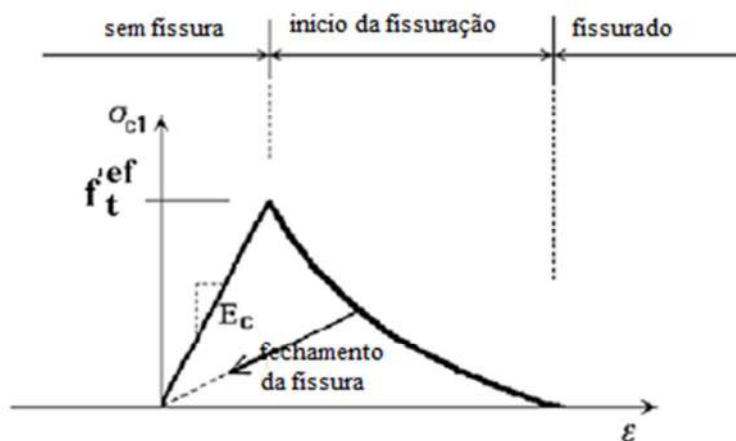


Figura 4.9 - Estágios da abertura de fissura. (Adaptado de CERVENKA, 2009).

Foi demonstrado, que o modelo de fissuração baseado no método das faixas de Bazant consegue descrever a propagação de uma fissura discreta num plano, também para concreto armado. (CERVENKA ET AL. 1991)

4.1.7 Critério de ruptura biaxial do concreto

4.1.7.1 Ruptura à compressão

O critério de ruptura de tensão biaxial é de acordo com o trabalho de KUPPER ET AL. (1969), como apresentado na Figura 4.10. No estado de tensão compressão com compressão a função de ruptura é:

$$f_c^{'ef} = \frac{1+3.65a}{(1+a)^2} f_c' \quad (4.21)$$

$$a = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad (4.22)$$

Onde:

- σ_{c1} e σ_{c2} – tensões principais no concreto;
- f_c' – força uniaxial do cilindro.

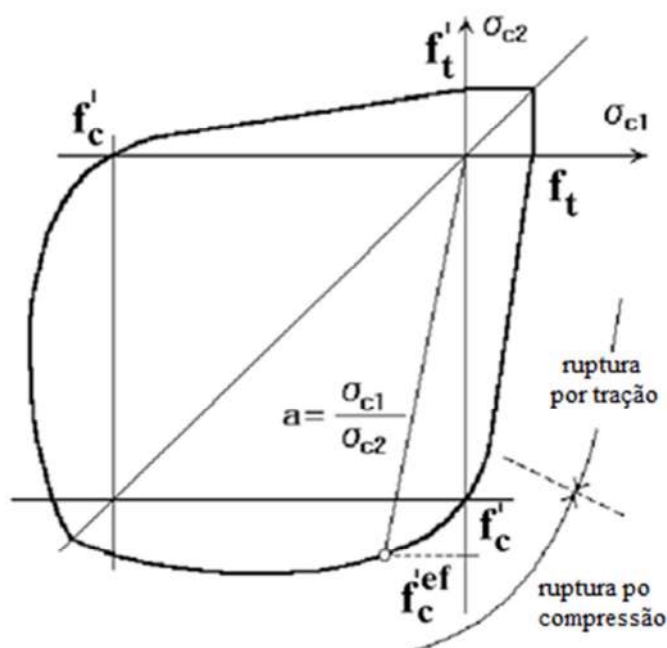


Figura 4.10 - Diagrama de ruptura biaxial do concreto. (Adaptado de CERVENKA, 2009).

No estado de tensão de tração com compressão, a função de ruptura continua linear do ponto $\sigma_{c1} = 0$, $\sigma_{c2} = f_c'$ até a região de tração com compressão com um decréscimo linear da força:

$$f_c'^{ef} = f_c' r_{ec} \quad (4.23)$$

$$r_{ec} = \left(1 + 5.3278 \frac{\sigma_{c1}}{f_c'}\right) \quad (4.24)$$

Onde r_{ec} é o fator redutor da força de compressão na direção principal 2 devido a tensão de tração na direção principal 1. O valor pra r_{ec} deve estar entre 1,0 e 0,9.

4.1.7.2 Ruptura à tração

No estado de tensão de tração com tração, a força de tração é constante e igual à força de tração uniaxial f_t' . No estado de tensão de tração com compressão, a força de tração é reduzida pela relação:

$$f_t'^{ef} = f_t' r_{et} \quad (4.25)$$

Onde r_{et} é o fator de redução da força de tensão na direção principal 1 devido a tensão de compressão na direção 2. Foi adota a função redução hiperbólica do tipo A e possui a seguinte formula:

$$r_{et} = \frac{A+(A-1)B}{AB} \quad (4.26)$$

$$B = Kx + A \quad (4.27)$$

$$x = \frac{\sigma_{c2}}{f_c'} \quad (4.28)$$

Tabela 4.1 - Apresenta os parâmetros usados na redução hiperbólica A.

Ponto		Parâmetro	
r	X	A	K
0,5	0,4	0,75	1,125

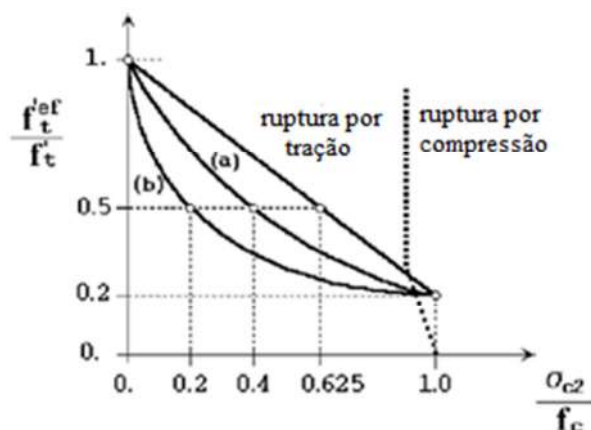


Figura 4.11 - Função de ruptura tensão x compressão para o concreto. (Adaptado de CERVENKA, 2009).

4.1.8 Força de compressão do concreto fissurado

Uma redução da força de compressão depois de fissurar na direção paralela a fissura é feita de uma maneira similar como encontrado nos experimentos de COLLINS E VECCHIO (1982) e formulado na teoria dos campos de compressão. Entretanto, uma função diferente é usada para a redução da força do concreto, a função tem a forma de uma função de Gauss, como mostrado na Figura 4.12.

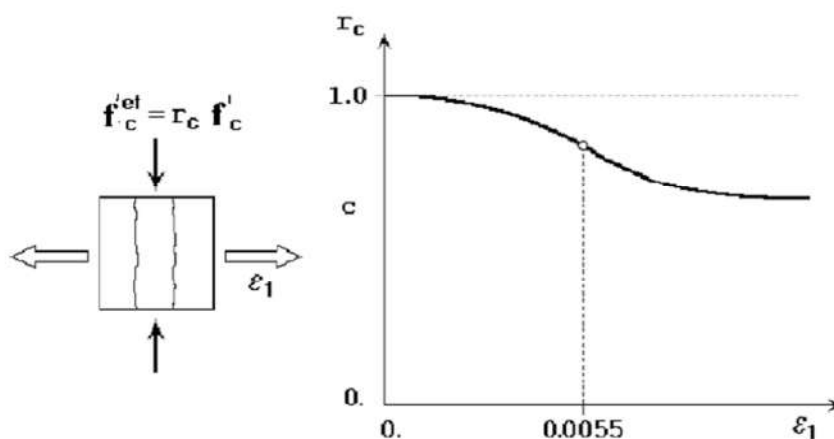


Figura 4.12 - Redução da força de compressão no concreto fissurado. (CERVENKA, 2009).

Os parâmetros dessa função foram obtidos experimentalmente através de dados publicados por KOLLEGER ET AL. (1988) e também inclui os dados de COLLINS E VECCHIO (1982).

$$f_c'^{ef} = r_c f_c' \quad (4.29)$$

$$r_c = c + (1 - c)e^{-(128\varepsilon_u)^2} \quad (4.30)$$

Para a deformação zero, não existe nenhuma redução da força de compressão, mas quando a deformação aumenta, a força cai assintoticamente aproximando de um valor mínimo $f_c'^{ef} = c.f_c'$.

A constante c representa a redução da força máxima quando ocorrem grandes deformações na direção normal a compressão. Nas pesquisas de DYNGELAND (1989) foram encontradas as reduções maiores que 0,8, logo foi adotado o valor de 0,8 para o modelo.

4.1.9 Enrijecimento da tração no concreto fissurado

O efeito do endurecimento da tração pode ser descrito como a contribuição do concreto fissurado para a rigidez a tração das barras de aço. Essa rigidez adicional é obtida pelo concreto não fissurado ou com a abertura de fissura menor que w_c e é gerado pelo processo de deformação localizada.

4.1.10 Matriz de rigidez do material

4.1.10.1 Concreto íntegro

A matriz de rigidez do material para o concreto íntegro tem a forma de uma matriz elástica de um material isotrópico. É escrito no sistema de coordenadas do eixo global:

$$D_c = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Onde:

- E - modulo de elasticidade do concreto obtido da lei uniaxial equivalente;

- ν - coeficiente de Poisson que é constante.

4.1.10.2 Concreto fissurado

Para o concreto fissurado a matriz de rigidez tem a forma de uma matriz elástica para um material ortotrópico. A matriz é formulada no sistema de coordenadas m_1 , m_2 , como mostrado na Figura 4.13, o qual possui o mesmo sentido do sentido da fissura.

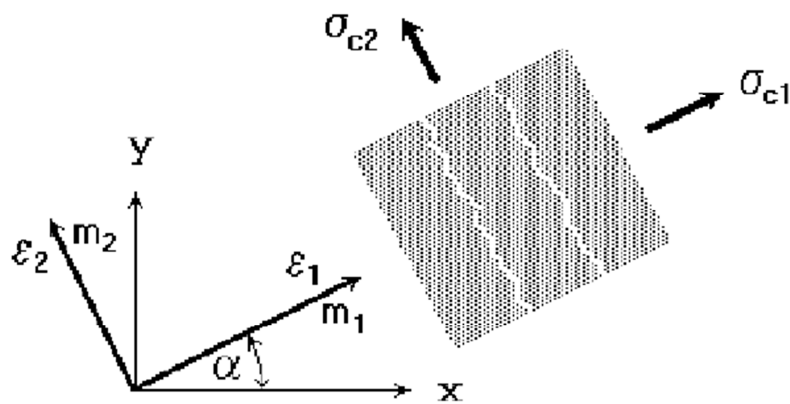


Figura 4.13 - Sistema de coordenadas para o concreto fissurado. (CERVENKA, 2009).

A direção 1 é normal ao plano da fissura e a direção 2 é paralela ao plano da fissura. A definição da constante elástica para o material ortotrópico no estado plano de tensão pela matriz de flexibilidade:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Assumindo que $\nu_{21} = \nu$ é o coeficiente de Poisson do concreto íntegro e usando a relação de simetria, é obtido:

$$\nu_{12} = \frac{E_1}{E_2} \nu \quad (4.33)$$

A matriz de rigidez D_c^L é a inversão da matriz de flexibilidade, assim a matriz fica:

$$D_c^L = H \begin{bmatrix} \xi & v\xi & 0 \\ v\xi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\xi = \frac{E_1}{E_2}, H = E_1(1 - \xi v^2) \quad (4.35)$$

Na relação acima E_2 não pode ser zero. Se E_2 for zero e E_1 não é zero, então uma formulação alternativa é usado com o parâmetro inverso $1/\xi = E_2/E_1$. Se ambos os módulos de elasticidade forem zero, a matriz D é igual a matriz nula.

4.1.11 Parâmetros padrões do modelo constitutivo

Tabela 4.2- Parâmetros padrões do modelo constitutivo. (Cervenka, 2009)

Parâmetro	Fórmula
Compressão cilíndrica	$f'_c = -0,85 f'_{cu}$
Força de tração	$f'_t = 0,24^{\frac{2}{3}} \sqrt{f'_{cu}}$
Módulo de elasticidade inicial	$E_c = (6000 - 15,5 f'_{cu}) \sqrt{f'_{cu}}$
Coefficiente de poisson	$\nu = 0,2$
Amolecimento na compressão	$\omega_d = -0,0005\text{mm}$
Força de compressão no concreto fissurado	$c = 0,8$
Tensão do "tension stiffening"	$\sigma = 0$
Energia de fratura	$G_F = 0,000025 f'_t \text{ef}$

4.2 Modelo Constitutivo de fratura plástica

4.2.1 Introdução

O modelo de fratura plástica combina modelos para comportamento de tração e compressão. O modelo de fratura é baseado na formulação clássica de fissura distribuída ortotrópica e o modelo de faixas de Bazant. Nele é utilizado o critério de ruptura de Rankine, amolecimento exponencial, e pode ser usado no modelo de fissuras fixa ou rotacional. O modelo de endurecimento ou amolecimento plástico é baseado na superfície de ruptura de Menétrey-William.

Esse modelo usa um algoritmo “*return mapping*” para a integração das equações constitutivas. É dada uma atenção especial para o desenvolvimento de um algoritmo para a combinação dos dois modelos.

O algoritmo combinado é baseado numa substituição recursiva, e permite que os dois critérios sejam melhorados e formulados separadamente. O algoritmo consegue suportar casos onde a superfície de ruptura de ambos os modelos foi atingida e também mudanças físicas como o fechamento de fissuras.

O modelo pode ser usado para simular a fissuração do concreto, esmagamento devido ao confinamento e fechamento de fissuras devido ao esmagamento do concreto em outra direção.

O modelo constitutivo estudado tem a particularidade de simular mudanças físicas, como o fechamento de fissuras, e não está restrito a uma forma particular de lei de amolecimento ou endurecimento. Com essa formulação proposta é possível formular os dois modelos inteiramente separados e a combinação dos mesmos pode ser obtida em um algoritmo diferente ou modelo.

4.2.2 Formulação do modelo do material

A formulação do modelo do material é baseada na decomposição da deformação em componente elástico ε_{ij}^e , plástico ε_{ij}^p e fratura ε_{ij}^f . (DE BORST, 1986).

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^f \quad (4.36)$$

Assim a formula da nova tensão σ_{ij}^n é descrita abaixo.

$$\sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl}(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^p - \Delta\varepsilon_{kl}^f) \quad (4.37)$$

Onde o incremento da deformação plástica e da deformação de fratura precisa ser obtido através em seus respectivos modelos.

4.2.3 Modelo de fratura de Rankine para a fissuração do concreto.

O critério de ruptura de Rankine é usado para a fissuração do concreto.

$$F_t^f = \sigma_{ij}'^t - f_{ti}' \leq 0 \quad (4.38)$$

É assumido que a deformação e a tensão são convertidas na direção do material, que no caso do modelo de fissura rotacional corresponde às direções principais.

Por isso, $\sigma_{ij}'^t$ é a tensão candidata e f_{ti}' é a resistência à tração do material na direção i . A tensão candidata vai possuir o preditor elástico.

$$\sigma_{ij}'^t = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}' \quad (4.39)$$

Se a função candidata não satisfizer a equação 4.38, o incremento da deformação por fratura na direção i é incluído pela hipótese que o estado final de tensão deve satisfazer a equação abaixo.

$$F_i^f = \sigma_{ij}'^n - f_{ti}' = \sigma_{ij}'^t - E_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}'^f - f_{ti}' = 0 \quad (4.40)$$

Essa equação pode ser simplificada quando é assumido que o incremento devido à deformação por fratura é normal à superfície de ruptura e que somente uma superfície de ruptura está sendo checada.

Para a superfície de ruptura k , o incremento da deformação por fratura tem a seguinte equação.

$$\Delta \varepsilon_{ij}^f = \Delta \lambda \frac{\partial F_k^f}{\partial \sigma_{ij}} = \Delta \lambda \delta_{ik} \quad (4.41)$$

Substituindo a equação 4.41 na equação 4.40, obtém-se uma equação para o multiplicador do incremento da fratura.

$$\Delta \lambda = \frac{\sigma_{kk}^t - f_t^k}{E_{kkkk}} = \frac{\sigma_{kk}^t - f_t^k(w_k^{max})}{E_{kkkk}} \quad (4.42)$$

$$w_k^{max} = L_t (\hat{\varepsilon}_{kk}^f + \Delta \lambda) \quad (4.43)$$

Essa equação só é resolvida usando iterações para materiais amolecidos, o valor da resistência à tração $f_t^k(w_k^{max})$ é uma função de abertura de fissura w e é baseado na formula de Hordijk, mesma formula utilizada no modelo constitutivo SBETA.

A abertura de fissura w é obtida do valor total da deformação por fratura $\hat{\varepsilon}_{kk}^f$ na direção k , mais o atual incremento da deformação por fratura $\Delta \lambda$, e essa soma é multiplicada pelo comprimento característico L_t .

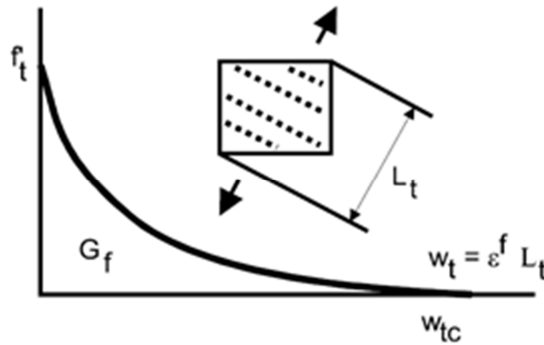


Figura 4.14 – Comprimento característico e “tensile softening”. (Adaptado de CERVENKA, 2009).

A equação 4.42 pode ser resolvida usando a substituição recursiva. É possível mostrar expandindo a função $f_t^k(w_k^{max})$ em série de Taylor que a iteração vai convergir para:

$$\left| -\frac{f_t^k(w_k^{max})}{\partial w} \right| < \frac{E_{kkkk}}{L_t} \quad (4.44)$$

É importante distinguir entre a deformação por fratura, a qual corresponde a máxima deformação de fratura obtida durante o processo de carregamento, e a deformação por fratura corrente, a qual pode ser menor devido ao fechamento da fissura, e é obtida através usando a formulação abaixo proposta por ROTS e BLAUWENDRAAD (ROTS; BLAUWENDRAAD, 1989).

$$\varepsilon'_{kl}{}^f = (E_{ijkl} + E'_{ijkl}{}^{cr})^{-1} E_{klmn} \varepsilon'_{mn} \quad (4.45)$$

$$\sigma'_{ijkl}{}^{cr} = E'_{ijkl}{}^{cr} \varepsilon'_{kl}{}^f \quad (4.46)$$

O tensor de quarta ordem de fissuração $E'_{ijkl}{}^{cr}$ representa o endurecimento local na direção do material devido à fissuração. Na formulação apresentada, é assumido, que não existe interação entre as componentes normais e de cisalhamento. Assim, o tensor de fissuração é dado pelas seguintes formulas.

$$E'_{ijkl}{}^{cr} = 0 \text{ para } i \neq k \text{ e } j \neq i \quad (4.47)$$

O endurecimento devido à fissura no modo I é dado por:

$$E'_{iiii}{}^{cr} = \frac{f'_t(w_i^{max})}{\hat{\varepsilon}'_{ii}{}^f} \quad (4.48)$$

E o endurecimento devido à fissura no modo II e III pode ser:

$$E'_{ijij}{}^{cr} = s_F \min(E'_{iiii}{}^{cr}, E'_{jjjj}{}^{cr}) \quad (4.49)$$

Onde $i \neq j$ e s_F é o coeficiente do fator de cisalhamento que define uma relação entre a normal e o endurecimento devido ao fissura pelo cisalhamento. O valor padrão do s_F é 20.

A força de cisalhamento do concreto fissurado é calculada usando a teoria do "Modified Compression Field Theory" (VECCHIO; COLLINS, 1986).

$$\sigma_{ij} \leq \frac{0,18\sqrt{f'_c}}{0,31 + \frac{24w}{a_g + 16}}, \quad i \neq j \quad (4.50)$$

Onde:

- f'_c - a resistência à compressão em Mpa;
- a_g - o tamanho máximo do agregado em mm;
- w - a largura máxima da fissura no local estudado em mm;

Esse modelo pode ser usado quando for dado o tamanho máximo do agregado, ao contrário, o comportamento padrão é onde a tensão de cisalhamento na superfície da fissura não pode exceder a resistência à tração.

A matriz constitutiva secante na direção do material usa a formulação de ROTS e BLAUWENDRAAD (1989) no formato de matriz.

$$E'^s = E - E(E'{}^{cr} + E)^{-1}E \quad (4.51)$$

A matriz de transformação do vetor deformação $T\varepsilon$ pode ser usada para transformar a matriz de rigidez secante local para o sistema de coordenadas global.

$$E^s = T\varepsilon^T E'{}^s T\varepsilon \quad (4.52)$$

4.2.4 Modelo de plasticidade para o esmagamento do concreto

O novo estado de tensão no modelo de plasticidade considera a formula do preditor corretor.

$$\sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl}(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^p) = \sigma_{ij}^t + E_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^p = \sigma_{ij}^t - \sigma_{ij}^p \quad (4.53)$$

O corretor de plasticidade σ_{ij}^p é obtido diretamente da função do campo pelo algoritmo “return mapping”.

$$F^p(\sigma_{ij}^t - \sigma_{ij}^p) = F^p(\sigma_{ij}^t - \Delta\lambda l_{ij}) = 0 \quad (4.54)$$

Um aspecto crucial é a definição da direção de retorno l_{ij} , do qual pode ser definido como:

$$l_{ij} = E_{ijkl} \frac{\partial G^p(\sigma_{kl}^t)}{\partial \sigma_{kl}} \text{ então } \Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \frac{\partial G^p(\sigma_{ij}^t)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.55)$$

Onde $G(\sigma_{ij})$ é a função potencial plástica, cuja derivada é avaliada pelo preditor do estado de tensão para determinar a direção de retorno.

A superfície de ruptura de MENTREY e WILLAM (1995) é o modelo do material usado.

$$F_{3P}^p = [\sqrt{1,5} \frac{\rho}{f_c'}]^2 + m \left[\frac{\rho}{\sqrt{6} f_c'} r(\theta, e) + \frac{\xi}{\sqrt{3} f_c'} \right] - c = 0 \quad (4.56)$$

Onde:

$$m = 3 \frac{f_c'^2 - f_t'^2}{f_c' f_t'} \frac{e}{e+1} \quad (4.57)$$

$$r(\theta, e) = \frac{4(1-e^2)\cos^2\theta + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos\theta + (2e-1)[4(1-e^2)\cos^2\theta + 5e^2 - 4e]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.58)$$

Nas equações acima (ξ, ρ, θ) são as coordenadas de Heigh-Vestergaard, f_c' é a resistência a compressão, f_t' é a resistência a tração. O parâmetro e (valor entre 0,5 e 1,0) define a circularidade da superfície de ruptura. A superfície de ruptura tem um canto pontudo se o valor de e for 0,5 e se o valor de e for 1,0 será totalmente circular em volta do eixo hidrostático.

A posição da superfície de ruptura não é fixa e pode mover dependendo do valor do parâmetro deformação devido ao endurecimento ou amolecimento. A deformação devido ao endurecimento é baseada na deformação do equivalente plástico, o qual é calculado de acordo com a seguinte formula.

$$\Delta \varepsilon_{eq}^p = \min(\Delta \varepsilon_{ij}^p) \quad (4.59)$$

Para a superfície de Menétrey-William, o efeito de amolecimento ou enrijecimento é controlado pelo parâmetro c , valor compreendido entre zero e um, o qual é utilizado durante o processo de escoamento ou esmagamento pela seguinte relação:

$$c = \left(\frac{f'_c(\varepsilon_{eq}^p)}{f'_c} \right)^2 \quad (4.60)$$

Nas duas formulas acima, a expressão $f'_c(\varepsilon_{eq}^p)$ indica a lei de enrijecimento ou amolecimento, a qual é baseada no teste de compressão uniaxial. A lei é apresentada na Figura 4.15, onde a curva de amolecimento é linear e a parte ascendente elíptica é dada pela seguinte formula:

$$\sigma = f_{co} + (f_c - f_{co}) \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_c} \right)^2} \quad (4.61)$$

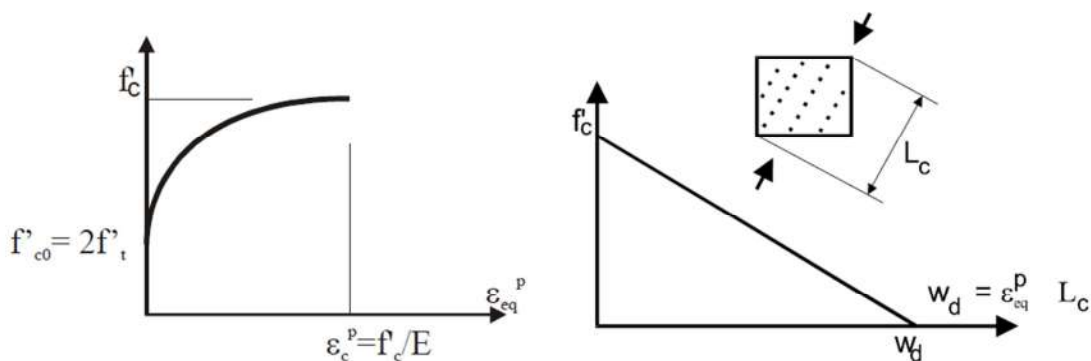


Figura 4.15 – Endurecimento / amolecimento por compressão e o comprimento característico. (CERVENKA, 2009).

A lei do ramo ascendente é baseada na deformação, enquanto o ramo descendente é baseado nos deslocamentos para introduzir a objetividade da malha na solução do elemento finito, e sua forma é baseada no trabalho de VAN MIER (1986). O início do comportamento não linear f'_{co} é um parâmetro de entrada como o valor da deformação plástica na resistência de compressão ε_c^p .

A figura acima apresenta os valores típicos para esses parâmetros. Especialmente a escolha do parâmetro f'_{co} que deve ser escolhido com cuidado porque é importante assegurar que as superfícies de ruptura por fratura e plástica se interceptem uma com a outra em todos os estágios do material.

Na curva descendente, a deformação plástica equivalente é transformada em deslocamento através do parâmetro de comprimento de escala L_c . Esse parâmetro é definido por analogia ao parâmetro do modelo de faixas de Bazant e corresponde a projeção do tamanho do elemento na direção principal da menor tensão.

A equação 4.60 é elevada ao quadrado devido à natureza quadrática da superfície de Menétry-Willam.

A direção de retorno é dada pelo seguinte potencial plástico:

$$G^p(\sigma_{ij}) = \beta \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 + \sqrt{2J_2} \quad (4.62)$$

Onde β determina a direção de retorno. Se $\beta < 0$ o material está sendo compactado durante o esmagamento, se $\beta = 0$ o volume do material é preservado, e se $\beta > 0$ o material está dilatando.

O algoritmo de retorno do mapeamento para o modelo plástico é baseado na aproximação do preditor-corretor como mostrado na figura a seguir. Durante a fase de corretor do algoritmo, a superfície de ruptura move ao longo do eixo hidrostático para simular o enrijecimento e o amolecimento.

A superfície de ruptura final tem o ápice locado na origem do sistema de coordenada de Haigh-Vestergaard. O método secante é baseado no algoritmo apresentado a seguir e é usado para determinar a tensão na superfície, o qual satisfaz a condição de escoamento e, também, as leis de enrijecimento e amolecimento.

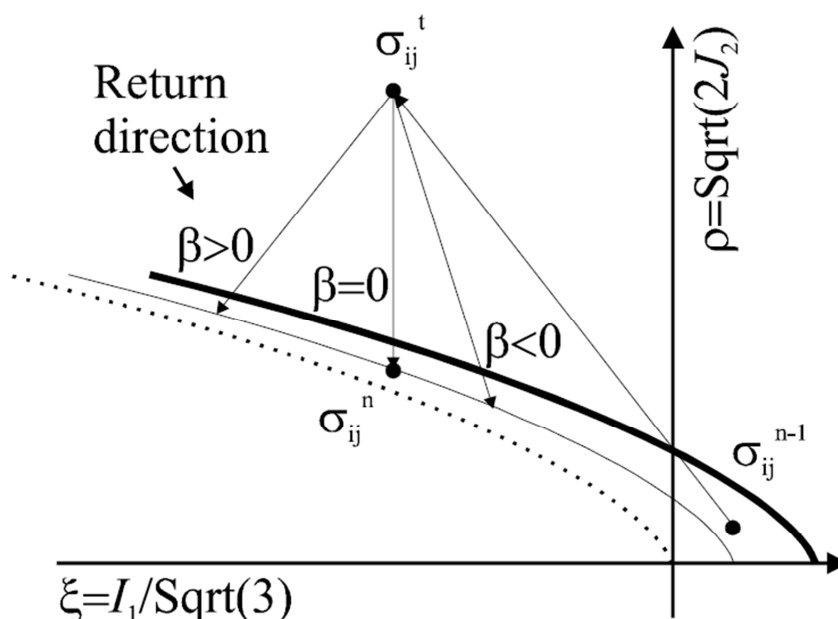


Figura 4.16 – Algoritmo do correto-preditor plástico. (CERVENKA, 2009).

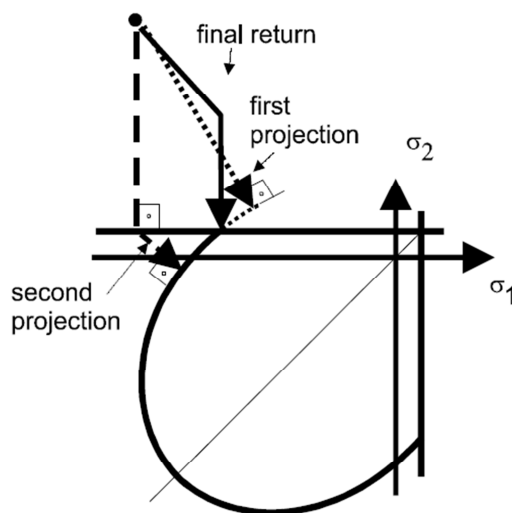


Figura 4.17 – Representação esquemática do processo iterativo mostrado em duas dimensões. (CERVENKA, 2009).

A seguir é apresentado cada passo que o algoritmo da plasticidade segue, chamado de algoritmo 1.

1. Dados de entrada que são σ_{ij}^{n-1} , $\varepsilon_{ij}^{P^{n-1}}$, $\Delta\varepsilon_{ij}^n$ (4.63)

2. Preditor elástico: $\sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^n$ (4.64)

3. Verificação do critério de ruptura: $f_A^P = F^P(\sigma_{ij}^t, \varepsilon_{ij}^{P^{n-1}})$, $\Delta\lambda_A = 0$ (4.65)

4. Se o critério de ruptura não é satisfeito, isto é, $f_A^P > 0$

$$4.1. \text{Reavaliar a direção de retorno: } m_{ij} = \frac{\partial G^P(\sigma_{ij}^t)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.66)$$

$$4.2. \text{"Return mapping": } F^P(\sigma_{ij}^t - \Delta\lambda_B E m_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p^{n-1}}) = 0 \rightarrow \Delta\lambda_B \quad (4.67)$$

4.3. Verificação do critério de ruptura:

$$f_B^P = F^P(\sigma_{ij}^t - \Delta\lambda_B E m_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p^{n-1}} + \Delta\lambda_B m_{ij}) \quad (4.68)$$

$$4.4. \text{Iteração (i) secante enquanto } |\Delta\lambda_A - \Delta\lambda_B| > e \quad (4.69)$$

4.4.1. Incremento do novo multiplicador plástico:

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_A - f_A^P \frac{\Delta\lambda_B - \Delta\lambda_A}{f_B^P - f_A^P} \quad (4.70)$$

4.4.2. Nova direção de retorno:

$$m_{ij}^{(i)} = \frac{\partial G^P(\sigma_{ij}^t - \Delta\lambda E m_{ij}^{(i-1)})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.71)$$

4.4.3. Verificação do critério de ruptura:

$$f^P = F^P(\sigma_{ij}^t - \Delta\lambda E m_{ij}^{(i)}, \varepsilon_{ij}^p + \Delta\lambda m_{ij}^{(i)}) \quad (4.72)$$

4.4.4. Novos valores iniciais para a iteração secante:

$$f_B^P < 0 \rightarrow f_B^P = f^P, \Delta\lambda_B = \Delta\lambda \quad (4.73)$$

$$f_B^P \geq 0 \rightarrow f_A^P = f_B^P, \Delta\lambda_A = \Delta\lambda_B, f_B^P = f^P, \Delta\lambda_B = \Delta\lambda \quad (4.74)$$

4.4.5. Fim do loop da iteração secante

5. Fim do algoritmo e atualização da tensão e deformação plástica

$$\varepsilon_{ij}^{pn} = \varepsilon_{ij}^{p^{n-1}} + \Delta\lambda_B m_{ij}^{(t)} \quad e \quad \sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^t - \Delta\lambda_B E m_{ij}^{(t)} \quad (4.75)$$

4.2.5 Combinação do modelo de plasticidade e de fratura

O objetivo é combinar os modelos descritos anteriormente em um único modelo utilizando a plasticidade para o esmagamento do concreto e o modelo de fratura de Rankine para fissuração. Esse problema pode ser formulado como uma solução simultânea das duas desigualdades.

$$F^P \left(\sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^f - \Delta \varepsilon_{kl}^p) \right) \leq 0 \text{ soluciona para } \Delta \varepsilon_{kl}^p \quad (4.76)$$

$$F^f \left(\sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^p - \Delta \varepsilon_{kl}^f) \right) \leq 0 \text{ soluciona para } \Delta \varepsilon_{kl}^f \quad (4.77)$$

Cada desigualdade depende do valor de saída de cada uma, assim um ambiente iterativo é desenvolvido.

Algoritmo 2:

$$\text{Passo 1: } F^P \left(\sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} \left(\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^{f(i-1)} + b \Delta \varepsilon_{kl}^{cor(i-1)} - \Delta \varepsilon_{kl}^{p(t)} \right) \right) \leq 0 \text{ para obter } \Delta \varepsilon_{kl}^{p(t)}$$

$$\text{Passo 2: } F^f \left(\sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} \left(\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^{p(t)} - \Delta \varepsilon_{kl}^{f(t)} \right) \right) \leq 0 \text{ para obter } \Delta \varepsilon_{kl}^{f(t)}$$

$$\text{Passo 3: } \Delta \varepsilon_{ij}^{cor^i} = \Delta \varepsilon_{ij}^{f(i)} - \Delta \varepsilon_{ij}^{f(i-1)} \quad (4.78)$$

A correção iterativa da norma da deformação entre duas iterações subsequentes pode ser expressa como:

$$\left\| \Delta \varepsilon_{ij}^{cor^{(i-1)}} \right\| = (1 - b) \alpha^f \alpha^P \left\| \Delta \varepsilon_{ij}^{cor^{(i-1)}} \right\| \quad (4.79)$$

$$\alpha^f = \frac{\left\| \Delta \varepsilon_{ij}^{f(i)} - \Delta \varepsilon_{ij}^{f(i-1)} \right\|}{\left\| \Delta \varepsilon_{ij}^{p(i)} - \Delta \varepsilon_{ij}^{p(i-1)} \right\|} \quad (4.80)$$

$$\alpha^P = \frac{\|\Delta\varepsilon_{ij}^{P(i)} - \Delta\varepsilon_{ij}^{P(i-1)}\|}{\|\Delta\varepsilon_{ij}^{cor}\|} \quad (4.81)$$

Onde b é um corretor da iteração ou fator de relaxamento, o qual é introduzido para garantir a convergência. É determinado na análise “*run-time*” de α^f e α^P , de um modo que a convergência do cenário possa ser garantida.

Os parâmetros α^f e α^P caracteriza a propriedade do mapeamento de cada modelo. É possível considerar que cada modelo é um operador, o qual mapeia o incremento da deformação como parâmetro de entrada no incremento da deformação por fratura ou da deformação plástica como forma de saída de valores.

A condição necessária para convergência é:

$$|(1 - b)\alpha^f\alpha^P| < 1 \quad (4.82)$$

Se b é igual a zero, um algoritmo iterativo baseado na substituição recursiva é obtido. A convergência pode ser garantida somente em dois casos:

- Um dos modelos não é usado, isto é, α^f ou α^P deve ser zero;
- Não existe o amolecimento nos dois modelos e a dilatação do material não é usado na parte plástica, o que significa para o potencial plástico $\beta \leq 0$, como apresentado na equação 4.62. Essa é uma condição suficiente, mas não necessária para assegurar que α^f e $\alpha^P < 1$.

Pode ser mostrado que os valores de α^f e α^P são diretamente proporcionais a razão de amolecimento de cada modelo. Desde que o amolecimento se mantenha constante para um modelo do material e o elemento finito, seus valores não se alteram significativamente entre cada iteração.

É possível selecionar o escalar b de um modo que a inequação 4.82 é sempre satisfeita no fim de cada iteração baseada nos valores atuais de α^f e α^P . Existem três possíveis cenários para o calculo de b apropriado:

- $|\alpha^f\alpha^P| \leq \chi$, onde χ é relacionado com a taxa de convergência requerida.

Para razões lineares pode ser utilizado $\chi = \frac{1}{2}$. Nesse caso a convergência é satisfatória e $b = 0$.

- $\chi < |\alpha^f \alpha^P| < 1$, a convergência será muito lenta. Nesse caso b pode ser estimado como $b = 1 - \frac{|\alpha^f \alpha^P|}{\chi}$, para aumentar a razão de convergências.
- $1 < |\alpha^f \alpha^P|$, então o algoritmo é divergente. Nesse caso, b pode ser calculado como $b = 1 - \frac{\chi}{|\alpha^f \alpha^P|}$ para estabilizar as iterações.

Essa aproximação garante a convergência enquanto os parâmetros α^f e α^P não mudarem drasticamente de valores entre as iterações, o qual pode ser satisfeito por uma formulação correta do modelo. A razão de convergência depende da fragilidade do material, o parâmetro de dilatação β e o tamanho da malha do elemento finito. É vantajosa para a estabilização do algoritmo a suavização do parâmetro b durante o processo iterativo:

$$b = \frac{(b^{(i)} + b^{(i-1)})}{2} \quad (4.83)$$

Onde o subscrito i denota o valor de duas iterações subsequentes. Isso irá eliminar problemas devido a oscilação do parâmetro corretor b . Uma condição importante para a convergência do Algoritmo 2 é que a superfície de ruptura dos dois modelos estejam se interseccionando em todas as posições possíveis durante o processo de endurecimento ou amolecimento.

As constantes extras são usadas no algoritmo iterativo. Se o estado de tensão no fim do primeiro passo violar o critério de Rankine, a ordem dos dois primeiros passos no algoritmo 2 são reservadas. O esmagamento do concreto, na realidade, em uma direção tem o efeito de fissuração nas outras direções.

É assumido que depois que o critério de escoamento plástico é violado, a força de tração em todas as direções do material é considerada igual a zero.

No nível estrutura, a matriz secante é usada para conseguir uma convergência robusta durante o processo de deformação localizada.

O algoritmo proposto para a combinação do modelo plástico e de fratura é mostrado graficamente na figura 4.17.

Quando ambas as superfícies são ativadas, o comportamento é parecido com o “*multi-surface plasticity*” (SIMO et al. 1988). Ao contrario do algoritmo do “*multi-surface plasticity*”, o método proposto é mais geral de um modo que cobre todos os

regimes de carregamentos, incluindo mudanças físicas como o fechamento de fissuras.

Existem iterações adicionais entre os dois modelos que precisa ser considerado para descrever o comportamento do material concreto:

- Depois do esmagamento do concreto, a força de tração deve diminuir também.
- De acordo com os trabalhos VECCHIO e COLLINS(1986), foi estabelecido que a força de compressão deve diminuir quando a fissura ocorrer na direção perpendicular. Essa teoria é chamada de “*Compression Field Theory*” e é usada para explicar a ruptura à cisalhamento em vigas e paredes de concreto.

A primeira iteração é resolvida adicionando um equivalente plástico da deformação para a máxima deformação por fratura no modelo de fratura para automaticamente aumentar o dano de tração baseado no dano à compressão enquanto a deformação por fratura satisfaz a seguinte condição:

$$\varepsilon_{kk}^{\prime f} = \frac{f_t'}{f_c'} \varepsilon_{eq}^p \quad (4.84)$$

A redução da força de compressão é baseada na seguinte formula proposta por Collins:

$$\sigma_c = r_c f_c' \quad (4.85)$$

$$r_c = \frac{1}{0,8+170\varepsilon_1} \quad (4.86)$$

$$r_c^{lim} \leq r_c \leq 1,0 \quad (4.87)$$

Onde ε_1 é a deformação por tração na fissura. No ATENA a maior deformação por fratura é considerada ε_1 e a redução da força de compressão é limitada pelo r_c^{lim} . Se r_c^{lim} não é especificado então a redução da compressão não é considerada.

4.3 Modelo Constitutivo da armadura

4.3.1 Lei bilinear

A lei bilinear, elasto-plástica, é apresentada na figura abaixo:

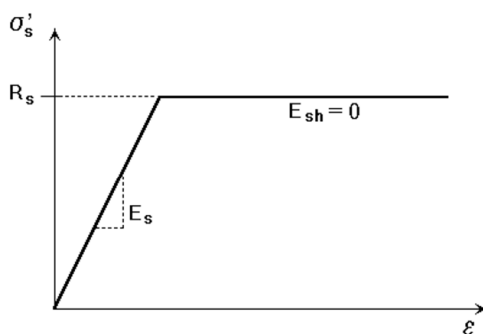


Figura 4.16 - Gráfico tensão x deformação bilinear da armadura. (CERVENKA,2009)

O primeiro trecho inclinado da reta é a parte elástica inicial e tem o módulo de elasticidade do aço E_s . O segundo da reta representa a plasticidade do aço com endurecimento e sua inclinação é E_{sh} . Nesse caso é considerado que ocorre plastificação perfeita no aço, logo $E_{sh} = 0$.

5 MODELAGEM COMPUTACIONAL

A seguir é apresentado os três experimentos para a modelagem numérica. O primeiro trata-se de um experimento com uma viga de concreto armado (LEONHARDT; WALTHER, 1962), o segundo experimento também é realizado com uma viga de concreto armado (BRESLER; SCORDELIS, 1963) e o terceiro experimento utiliza vigas de concreto armado em escala reduzida, fabricadas com microconcreto e arame, simulando uma barra de aço lisa (ALMEIDA et al, 2006).

5.1 Viga de concreto armado ensaiada por LEONHARDT e WALTHER

Esse experimento é apresentado no trabalho de LEONHARDT e WALTHER (1962) sobre o estudo do comportamento ao cisalhamento de peças de concreto armado. A Figura 5.1 apresenta as propriedades geométricas da viga utilizada, bem como o esquema de ensaio em quatro pontos.

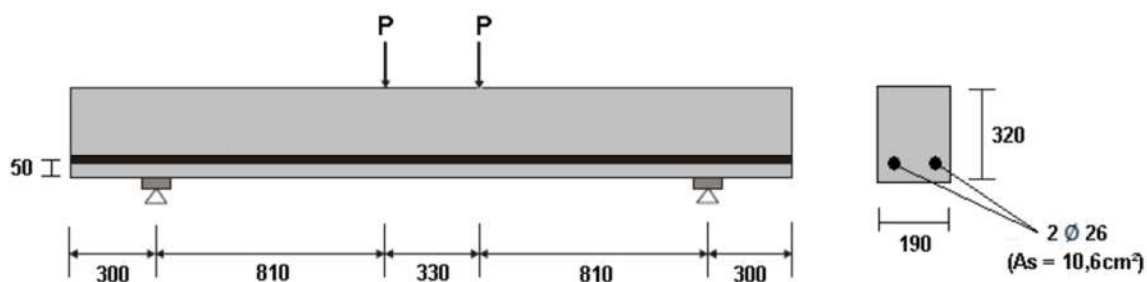


Figura 5.1 - Propriedades geométricas e esquema de ensaio em quatro pontos. (LEONHARDT; WALTHER, 1962)

5.1.1 Modelagem no ATENA 2D

Para essa viga foram criados elementos, do tipo CCIsoQuad, com o tamanho médio de 5 cm por 5 cm, como apresentado na Figura 5.2. Também pode ser visto os tipos de apoios considerados para o problema. Foi considerada a aderência perfeita entre concreto e aço.

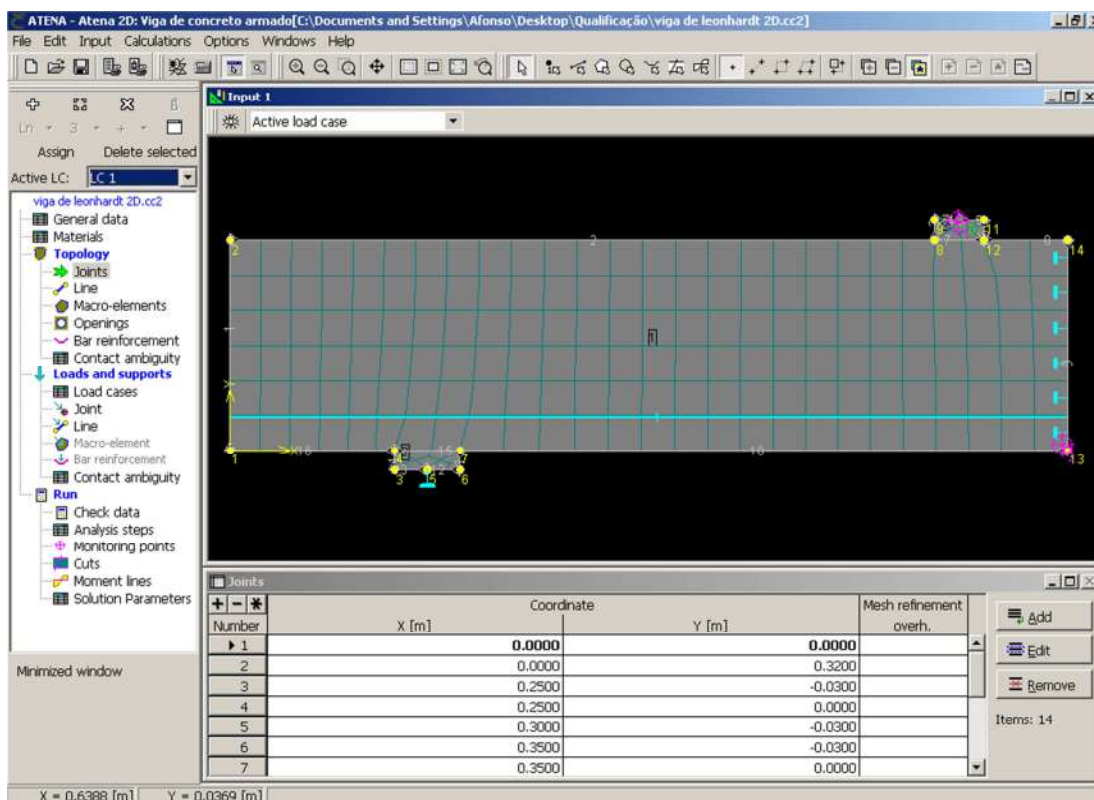


Figura 5.2 - Divisão da viga em elementos de 5cm x 5cm e a visualização dos apoios.

A Figura 5.3 apresenta a localização e o valor da deformação imposta para simular o ensaio carga versus deslocamento vertical.

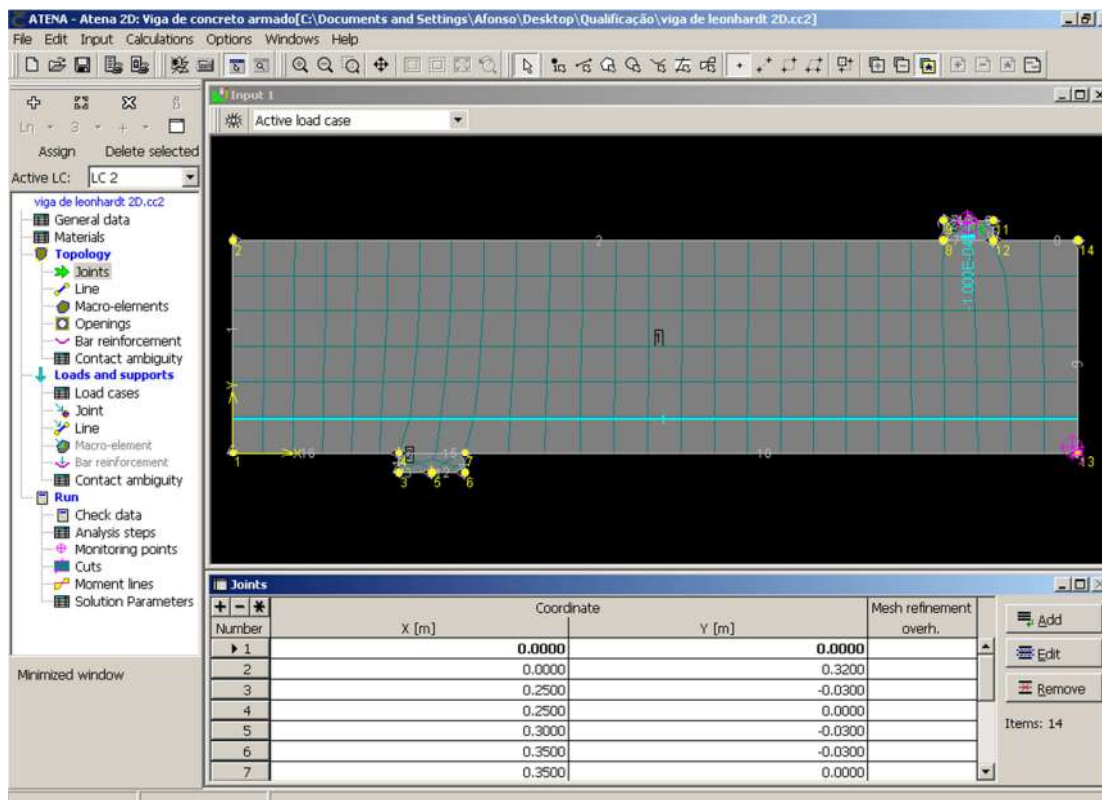


Figura 5.3 - Localização e o valor da deformação imposta.

A Figura 5.4 apresenta os pontos de integração que existe nos elementos do tipo CCIsoQuad.

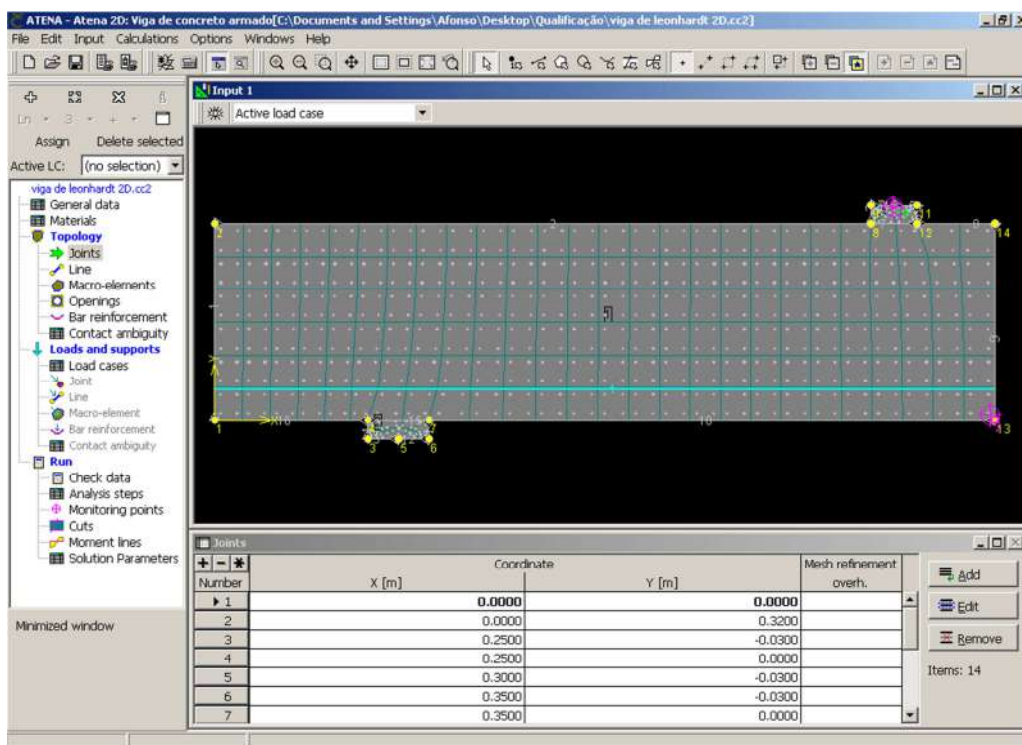


Figura 5.4 - Pontos de integração.

As Figura 5.5, Figura 5.6, Figura 5.7 e Figura 5.8 apresentam os valores usados nos parâmetros de entrada para o concreto nesse caso.

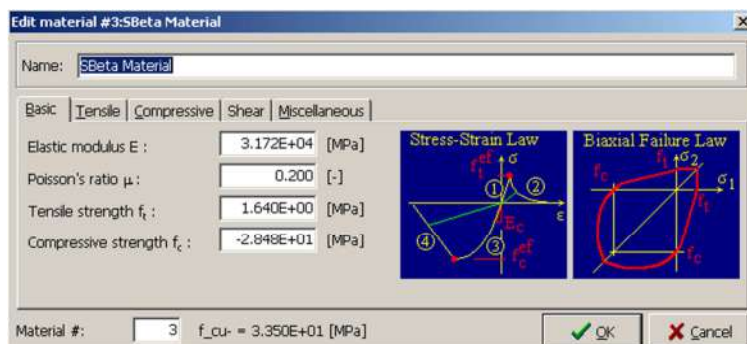


Figura 5.5 – Valores dos parâmetros de entrada.

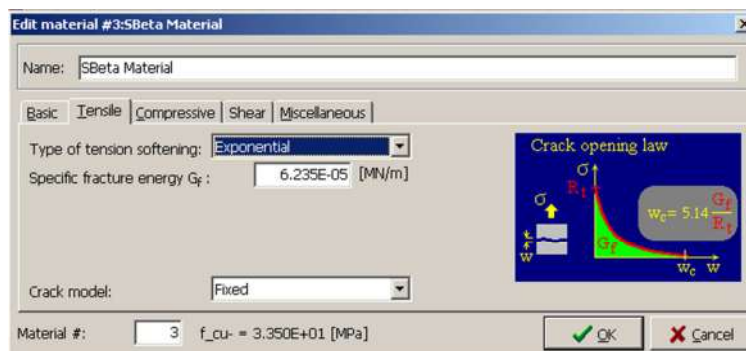


Figura 5.6 – Valores dos parâmetros de entrada.

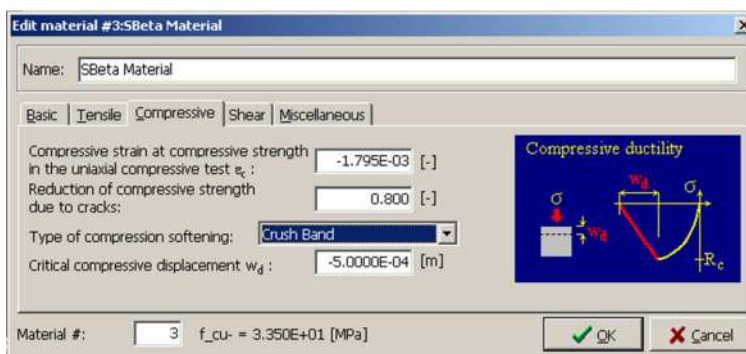


Figura 5.7 – Valores dos parâmetros de entrada.

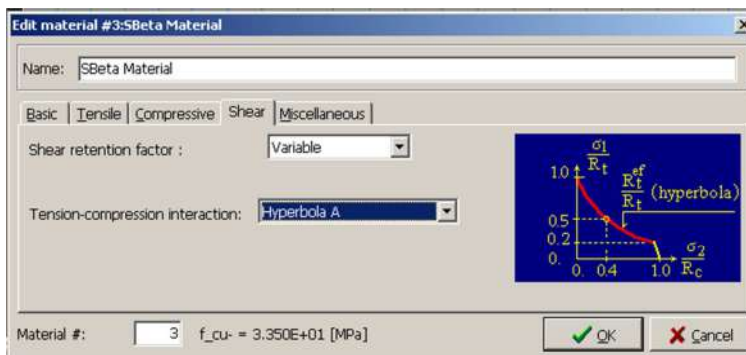


Figura 5.8 - Valores dos parâmetros de entrada.

5.1.2 Modelagem no ATENA 3D

Na modelagem em três dimensões dessas vigas foram criados elementos, do tipo CCIsoBrick, com o tamanho médio de 0,4 cm por 0,4 cm, como apresentado na Figura 5.9 - Divisão da viga em elementos do tipo CCIsoBrick.. Também é possível ver as restrições de deslocamentos utilizadas nos apoios e na consideração de simetria da viga para a análise.

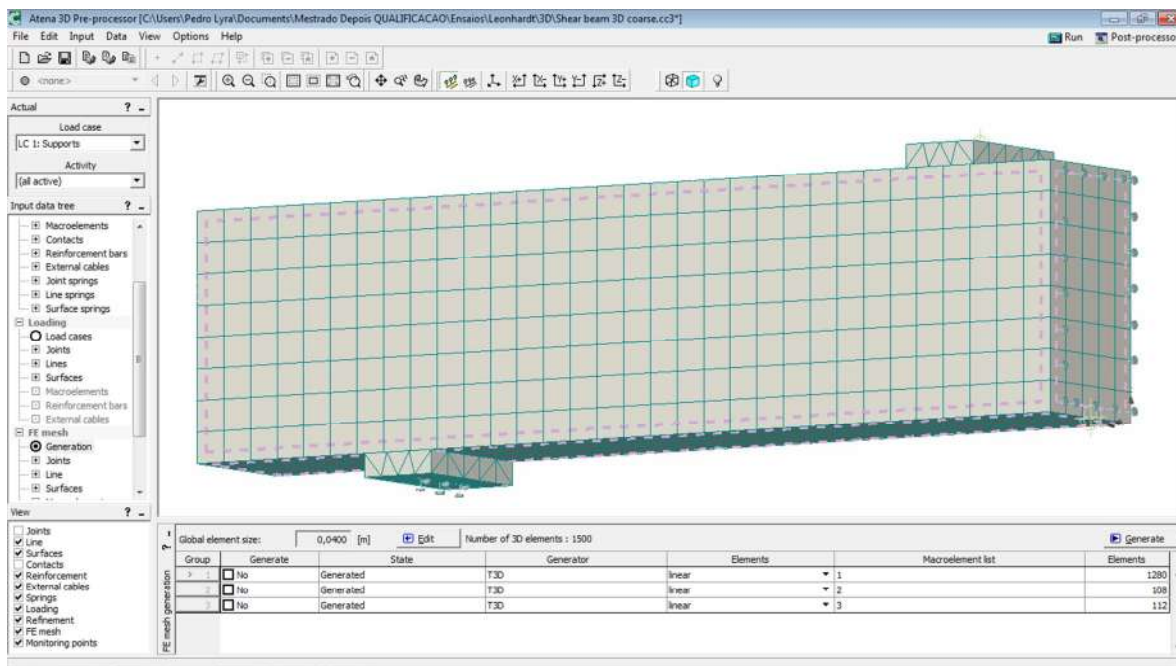


Figura 5.9 - Divisão da viga em elementos do tipo CCIsoBrick.

Os parâmetros de entrada para a definição do concreto e do aço foram os mesmos utilizados para a modelagem em duas dimensões.

5.1.3 Resultados

A Figura 5.10 apresenta a comparação, através do gráfico da carga versus deslocamento vertical, entre o resultado obtido pelo programa ATENA e obtido no experimento realizado.

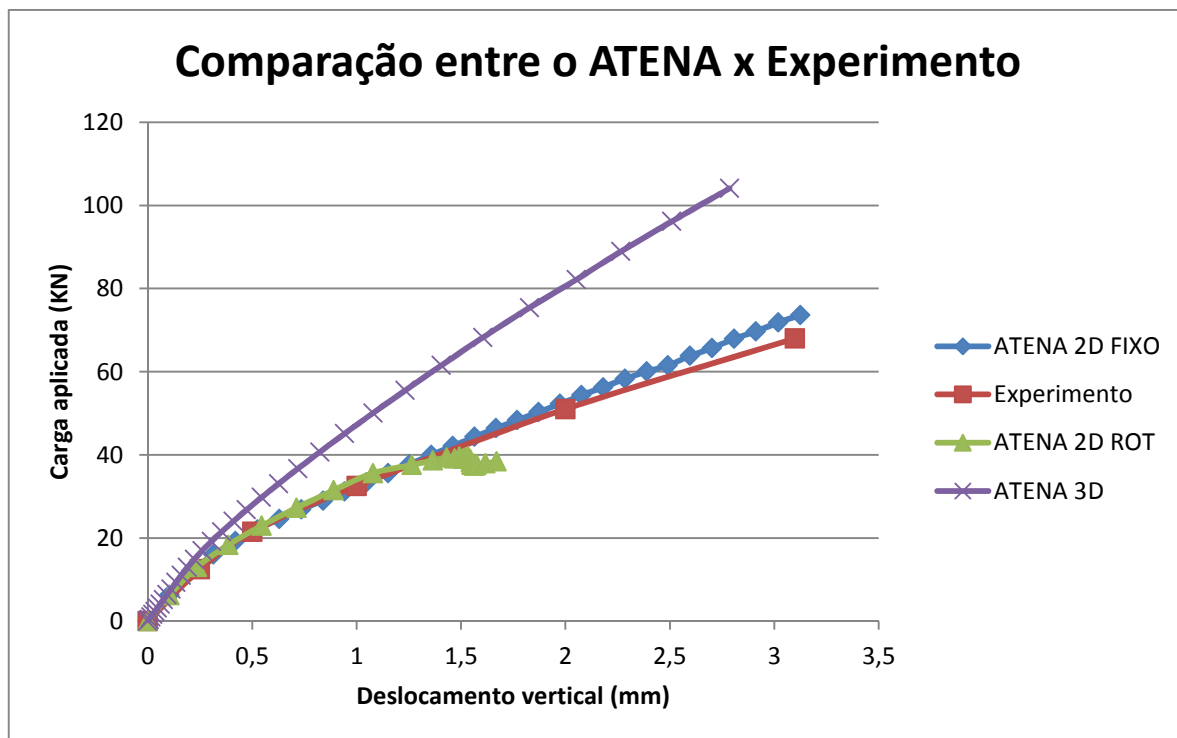


Figura 5.10 – Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.

As Figura 5.11, Figura 5.12 e Figura 5.13 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 2D utilizando a fissura rotacional. apresentam os padrões de fissuração durante o experimento e obtido pelo programa ATENA de cada modelagem, respectivamente.

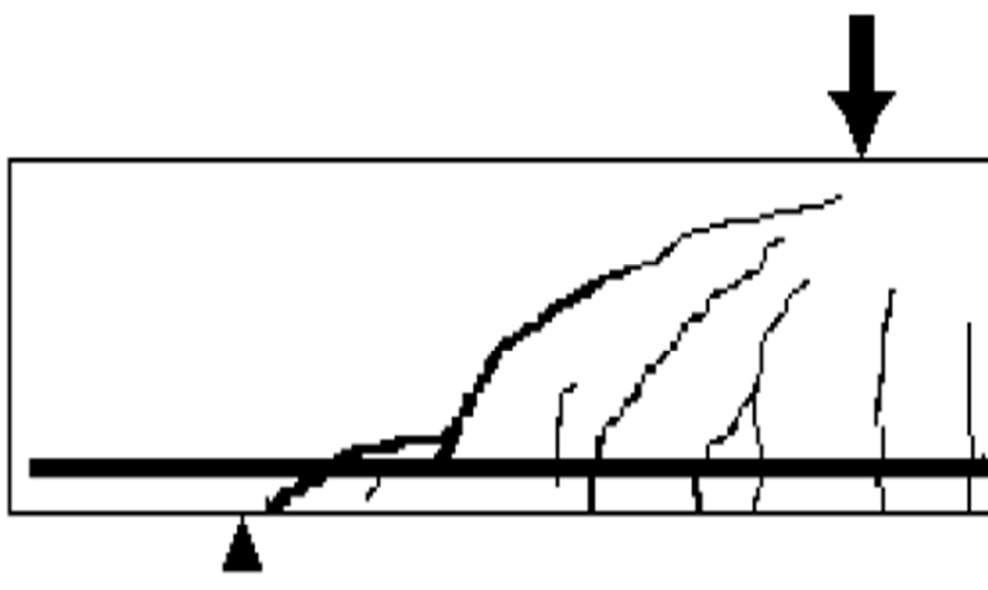


Figura 5.11 - Padrão de fissuração observado no experimento.

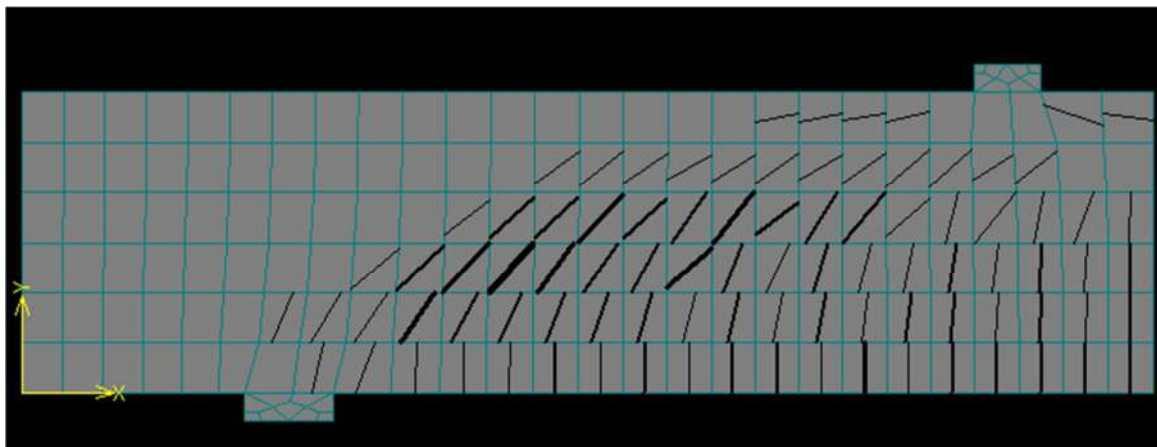


Figura 5.12 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 2D utilizando a fissura fixa.

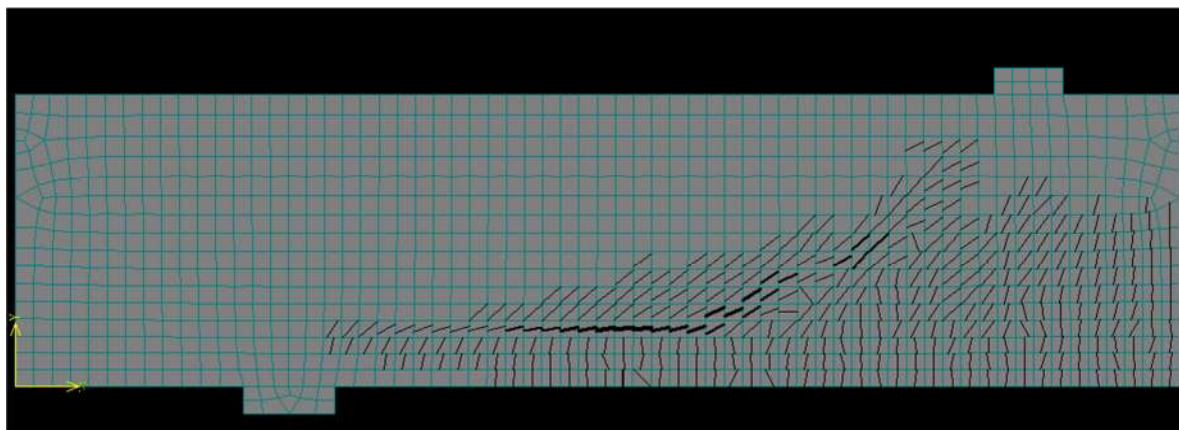


Figura 5.13 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 2D utilizando a fissura rotacional.

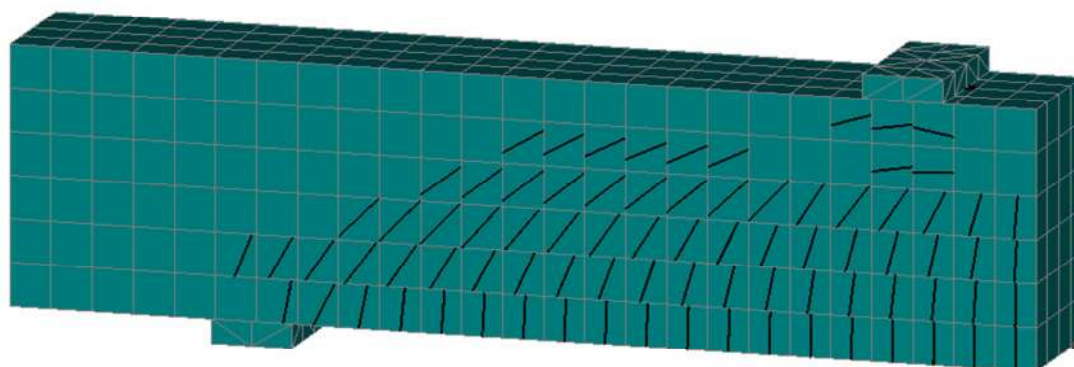


Figura 5.14 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 3D.

A Tabela 5.1 apresenta um resumo das cargas de ruptura com seu respectivo deslocamento de cada modelo estudado.

Tabela 5.1 - Tabela resumo dos resultados.

	Carga de ruptura (kN)		Deslocamento (mm)	
	Resultado	Desvio	Resultado	Desvio
ATENA 2D fixo	73,6	8,24%	3,13	0,97%
ATENA 2D rot	38,45	-43,46%	1,67	-46,13%
ATENA 3D	104	52,94%	2,79	-10,00%

5.2 Viga de concreto armado ensaiada por BRESLER e SCORDELIS

As 12 vigas testadas por BRESLER e SCORDELIS (1963) consistem de quatro séries de três vigas. Cada série difere na quantidade de armadura longitudinal, na quantidade de estribos, no tamanho do vão, na seção transversal e na resistência do concreto. Todas as vigas possuem seção transversal retangular e tem a mesma altura.

Para prevenir a ruptura por ancoragem insuficiente, a armadura longitudinal inferior foi estendida além das faces extremas da viga e foi ancorada a placas de aço. Todas as vigas foram submetidas a um carregamento monotônico no ponto central do vão.

Para este trabalho foi modelado somente a viga OA1 que possui um vão de 3,66m e seção transversal de 56cm de altura por 31cm de largura, a Figura 5.15 apresenta as características geométricas da viga OA1.

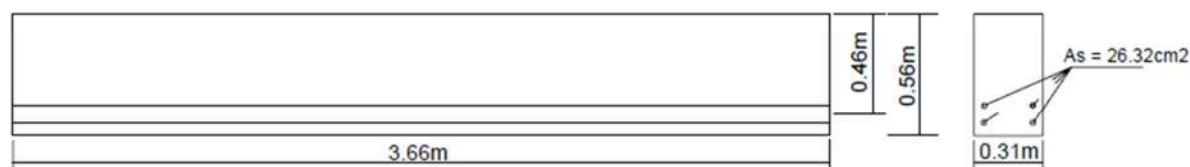


Figura 5.15 - Viga OA1

5.2.1 Modelagem no ATENA 2D

Para essa viga foram criados elementos, do tipo CCIsoQuad, com o tamanho médio de 2,5 cm por 2,5 cm, como apresentado na . Também pode ser visto os tipos de

apoios considerados para o problema. Foi considerada a aderência perfeita entre concreto e aço.

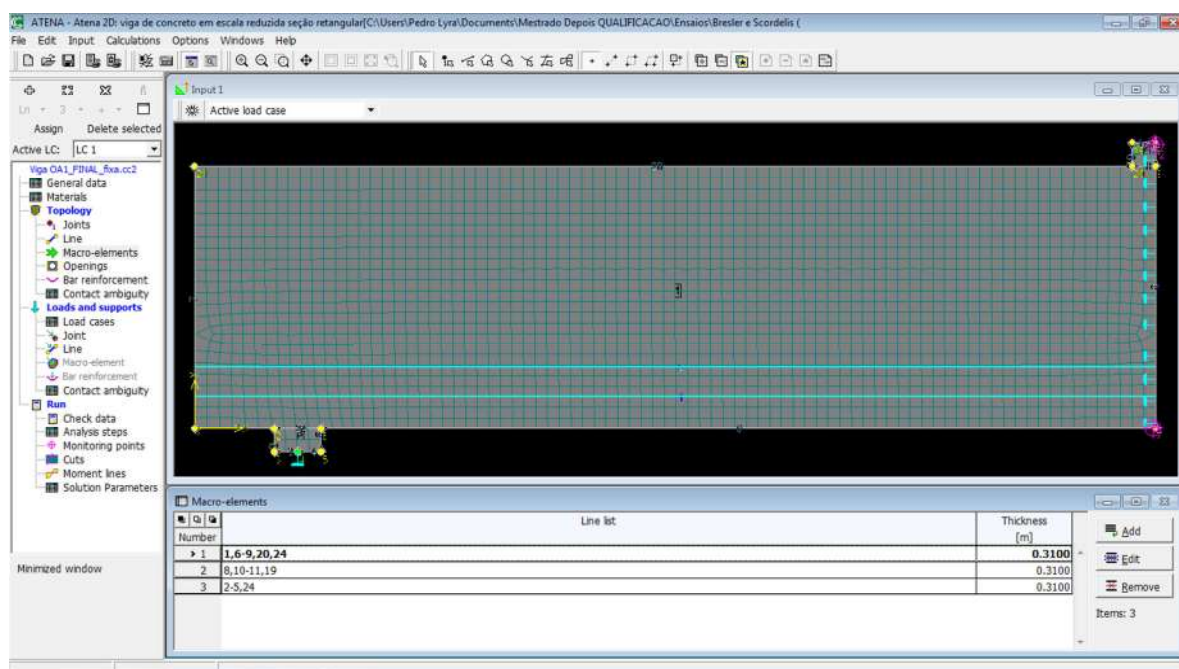


Figura 5.16 - Divisão da viga em elementos de 2,5cm x 2,5cm e a visualização dos apoios.

A Figura 5.3 apresenta a localização e o valor da deformação imposta de 0,25 mm para simular o ensaio carga x deslocamento vertical.

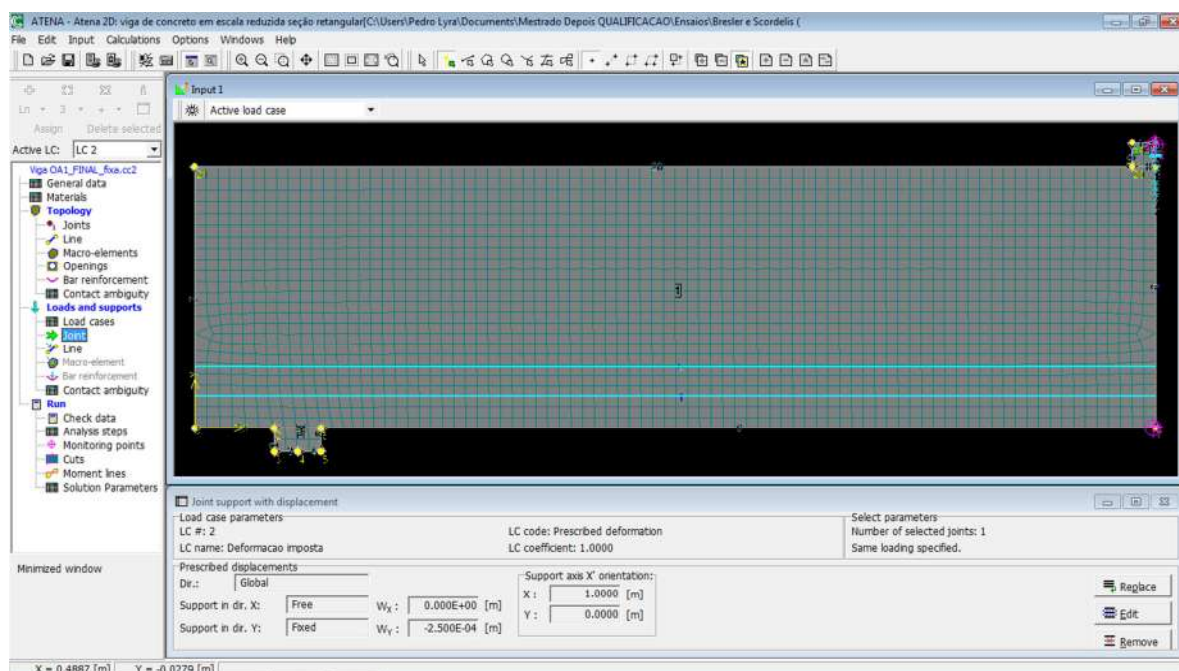


Figura 5.17 - Localização e o valor da deformação imposta.

As Figura 5.5, Figura 5.6, Figura 5.7 e Figura 5.8 apresentam os valores usados nos parâmetros de entrada para o concreto nesse caso.

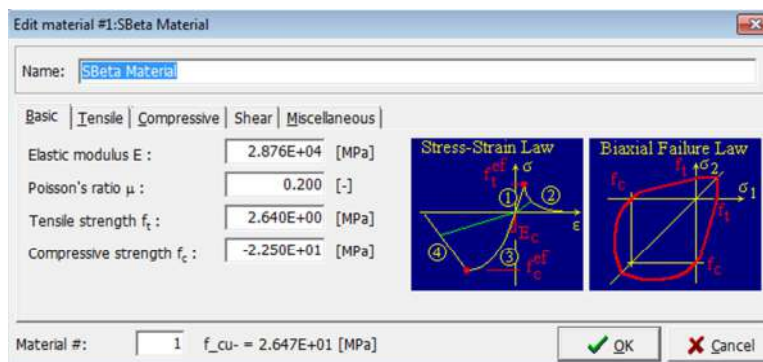


Figura 5.18 – Valores dos parâmetros de entrada.

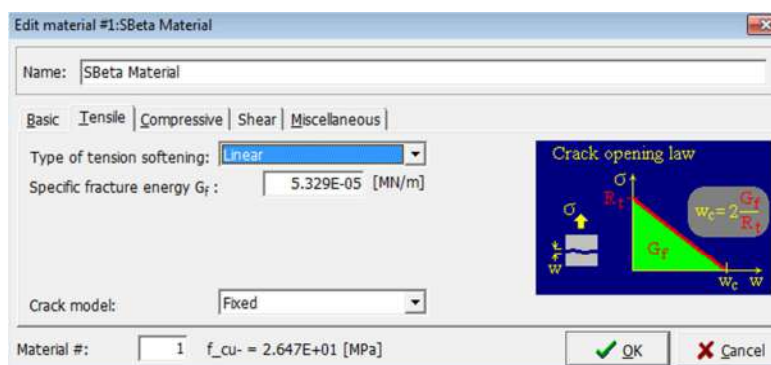


Figura 5.19 – Valores dos parâmetros de entrada.

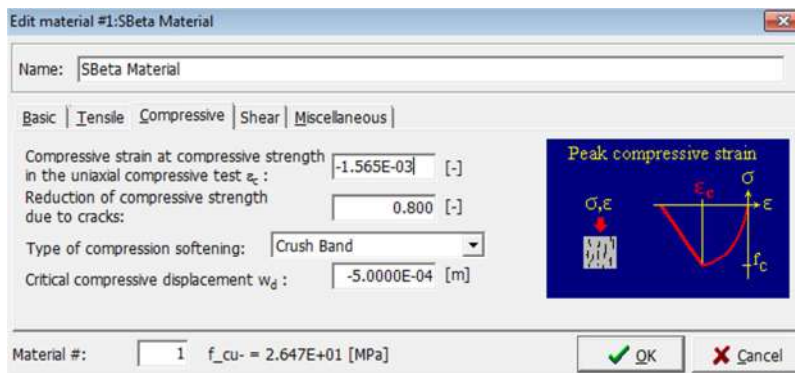


Figura 5.20 – Valores dos parâmetros de entrada.

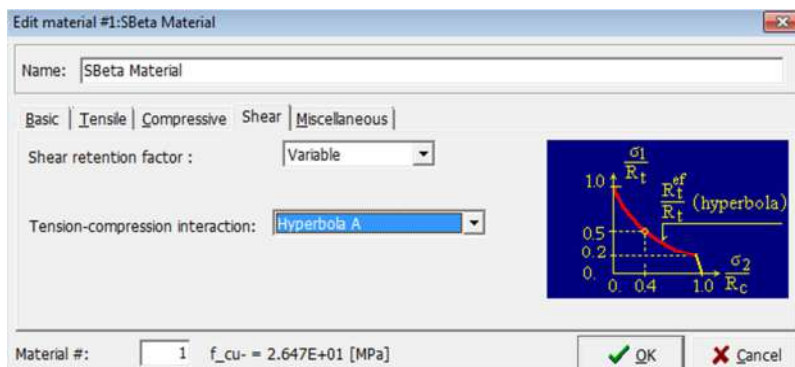


Figura 5.21 - Valores dos parâmetros de entrada.

5.2.2 Modelagem no ATENA 3D

Na modelagem em três dimensões dessas vigas foram criados elementos, do tipo CCIsoBrick, com o tamanho médio de 4 cm por 4 cm, como apresentado na Figura 5.22 - Divisão da viga em elementos CCIsoBrick.. Também nessa mesma figura é possível ver as restrições de deslocamentos utilizadas nos apoios e na consideração de simetria da viga para a análise.

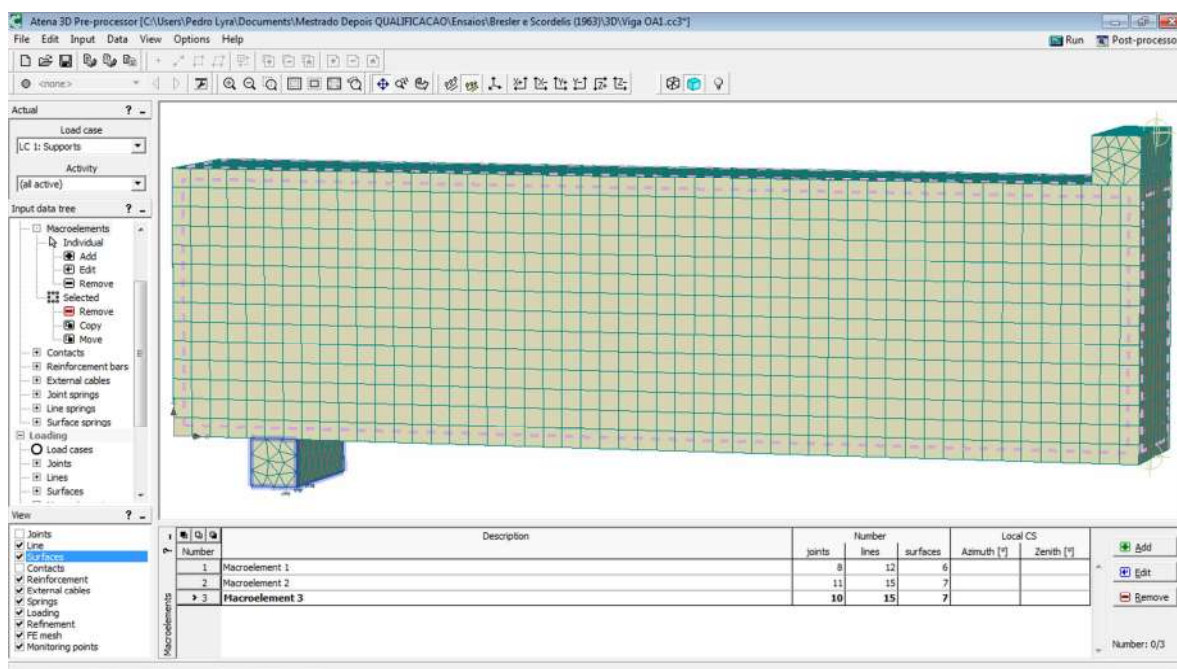


Figura 5.22 - Divisão da viga em elementos CCIsoBrick.

5.2.3 Resultados

A Figura 5.23 apresenta a comparação, através do gráfico da carga versus deslocamento vertical, entre o resultado obtido pelo programa ATENA e obtido no experimento realizado.

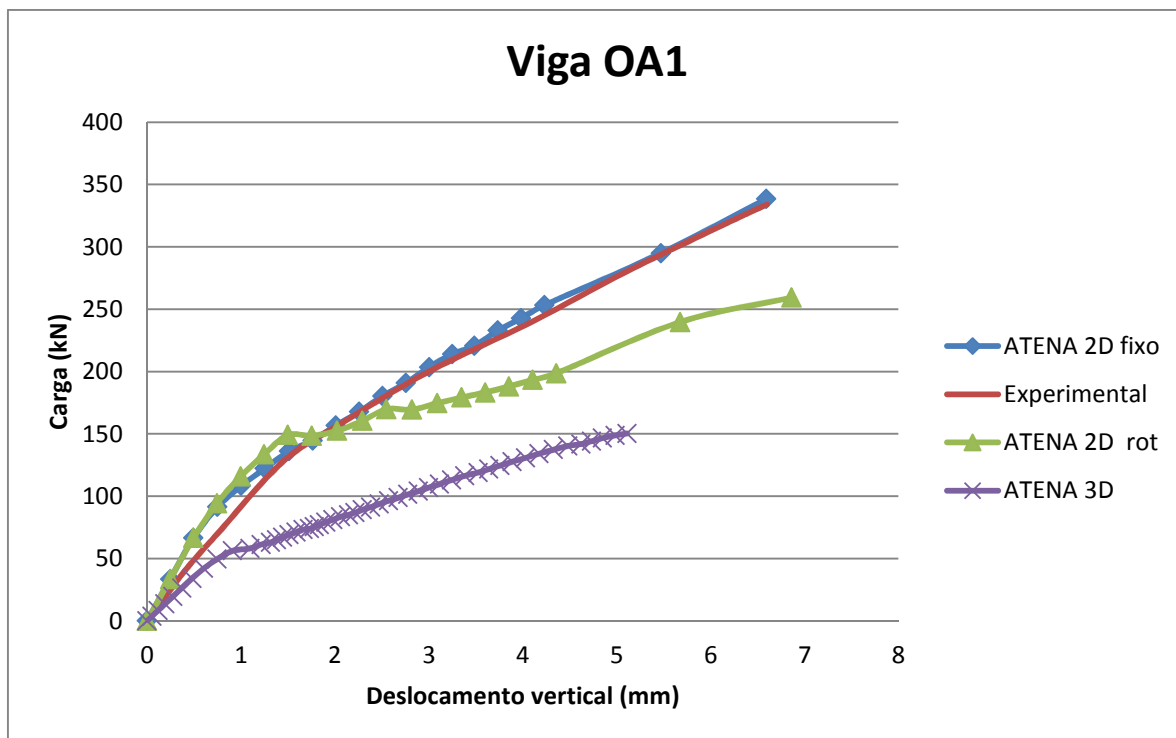


Figura 5.23 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.

As Figura 5.24 e Figura 5.25 apresentam os padrões de fissuração obtidos pelo programa ATENA de cada modelagem.

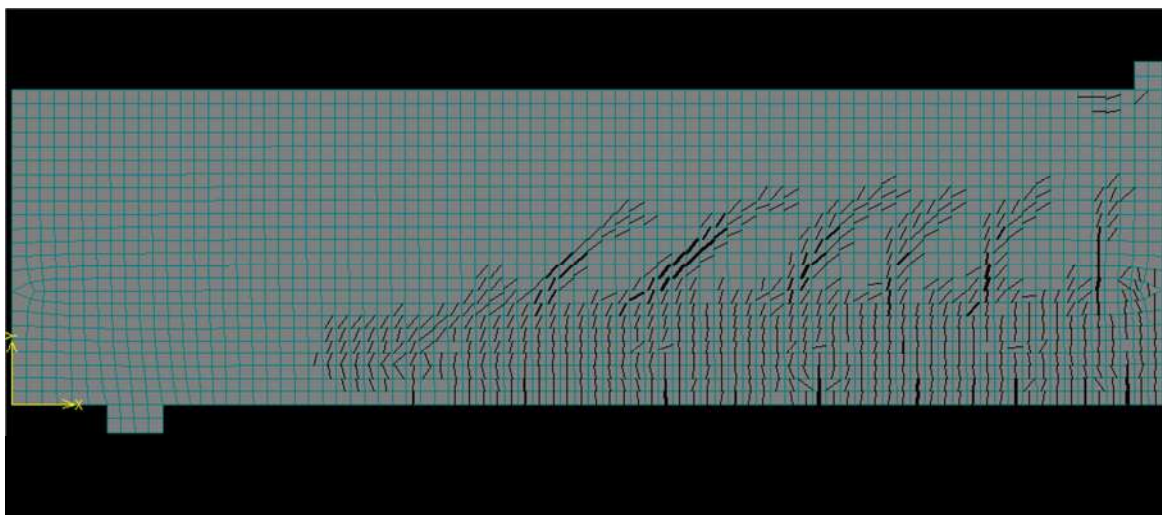


Figura 5.24 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 2D utilizando a fissura fixa.

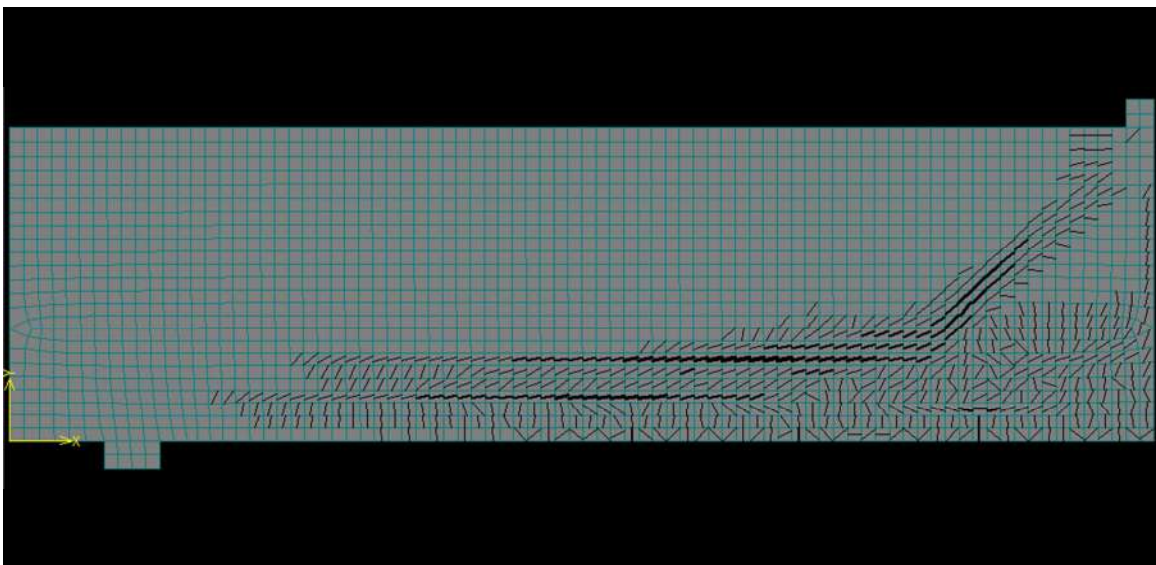


Figura 5.25 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 2D utilizando a fissura rotacional.

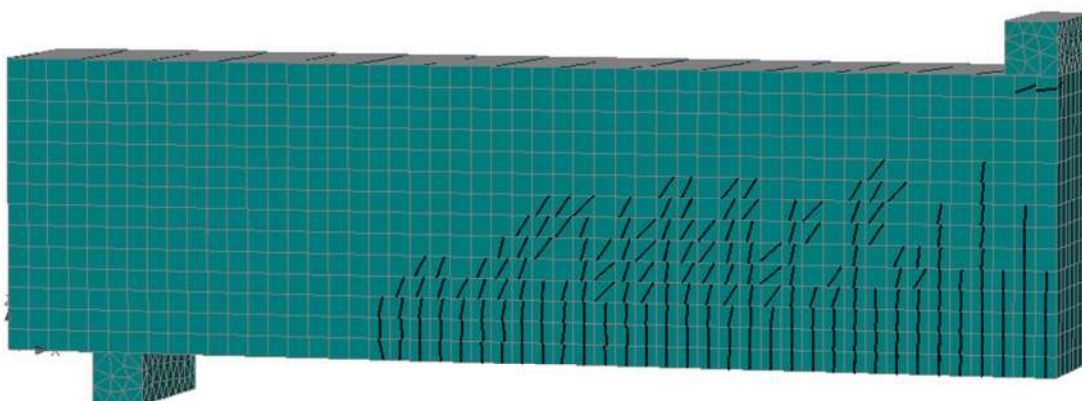


Figura 5.26 - Padrão de fissuração obtido pelo programa ATENA 3D.

A Tabela 5.2 apresenta um resumo das cargas de ruptura com seu respectivo deslocamento de cada modelo estudado.


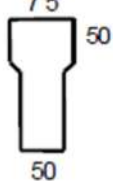
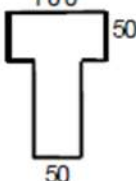
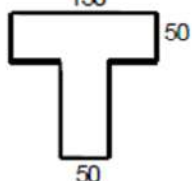
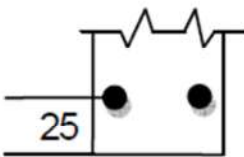
Tabela 5.2 - Tabela resumo dos resultados.

	Carga de ruptura (kN)		Deslocamento (mm)	
	Resultado	Desvio	Resultado	Desvio
ATENA 2D fixo	338,3	1,29%	6,593	-0,11%
ATENA 2D rot	259,3	-22,37%	6,863	3,98%
ATENA 3D	150,3	-55,00%	5,11	-22,58%

5.3 Vigas de concreto armado em escala reduzida ensaiadas por ALMEIDA et al.

Esse experimento apresentado por ALMEIDA et al. (2006) mostra a influência da seção T na evolução do processo de fratura das vigas de concreto armado quando carregadas. Foram feitas vigas com seção T de microconcreto, a mesa superior da seção T teve sua largura variando até virando uma seção retangular, como mostrado na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Dimensões das seções T e retangular e o arranjo da armadura. (ALMEIDA et al, 2006)

Rebar				
	R2-1	TP2-1	TM2-1	TG2-1
	R2-2	TP2-2	TM2-2	TG2-2

(dimensões em mm)

A Figura 5.27 apresenta o tamanho do vão e onde será aplicada a carga nos modelos reduzidos.

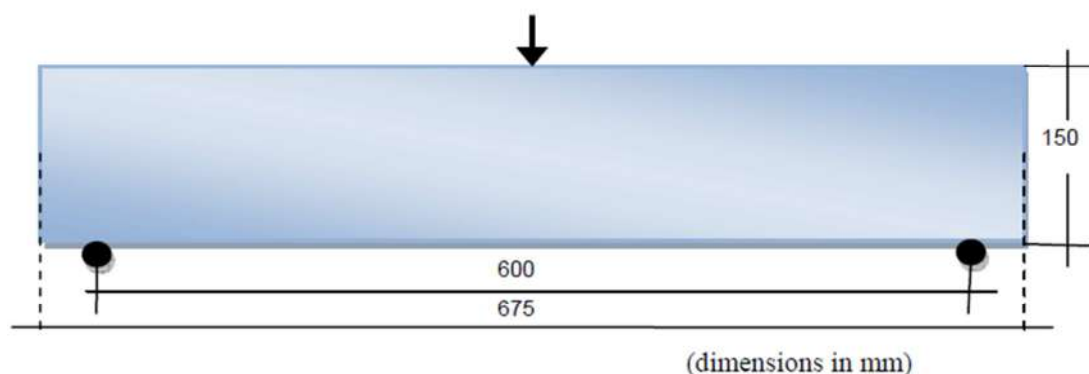


Figura 5.27 - Dimensão das vigas e aplicação do carregamento. (ALMEIDA et al.,2006)

Todos os modelos reduzidos possuem o mesmo índice de fragilidade (β_h), esse parâmetro foi escolhido porque duas seções diferentes geometricamente terão o mesmo comportamento à fratura se o índice for igual, definido como:

$$\beta_H = \frac{D}{l_{ch}}, \text{ onde } l_{ch} = \frac{E_c G_F}{f_t^2} \quad (5.1)$$

Onde D é a altura da viga, l_{ch} é comprimento característico de Hillerborg, E_c é o módulo de elasticidade, G_F é a energia de fratura e f_t é a resistência à tração.

Como o comprimento característico de um concreto comum é de 300mm na média, os modelos reduzidos foram feitos com 150mm de altura para que simulassem o mesmo mecanismo de fratura que vigas de concreto com 450mm de altura.

As características do microconcreto usado nos modelos reduzidos obtido são apresentadas na Tabela 5.4- Características do microconcreto. (ALMEIDA et al.,2006).

Tabela 5.4- Características do microconcreto. (ALMEIDA et al.,2006)

f_c MPa	f_t MPa	E_C GPa	G_F N/m	l_{ch} mm	β_H
54,6	4,8	25,5	55,6	60,4	2,5

Para as dimensões selecionadas para as vigas e obter uma taxa de aço adequada, as bitolas das barras de aço são de 3mm, como essa bitola não é de uso comercial, foi necessário usar arames com essa bitola.

A Figura 5.28 apresenta a curva tensão versus deformação correspondente aos arames usados na viga de concreto armado. O módulo de elasticidade é de 205 GPa, a tensão de escoamento para uma deformação é de 765 MPa e a deformação última é de 0,6%.

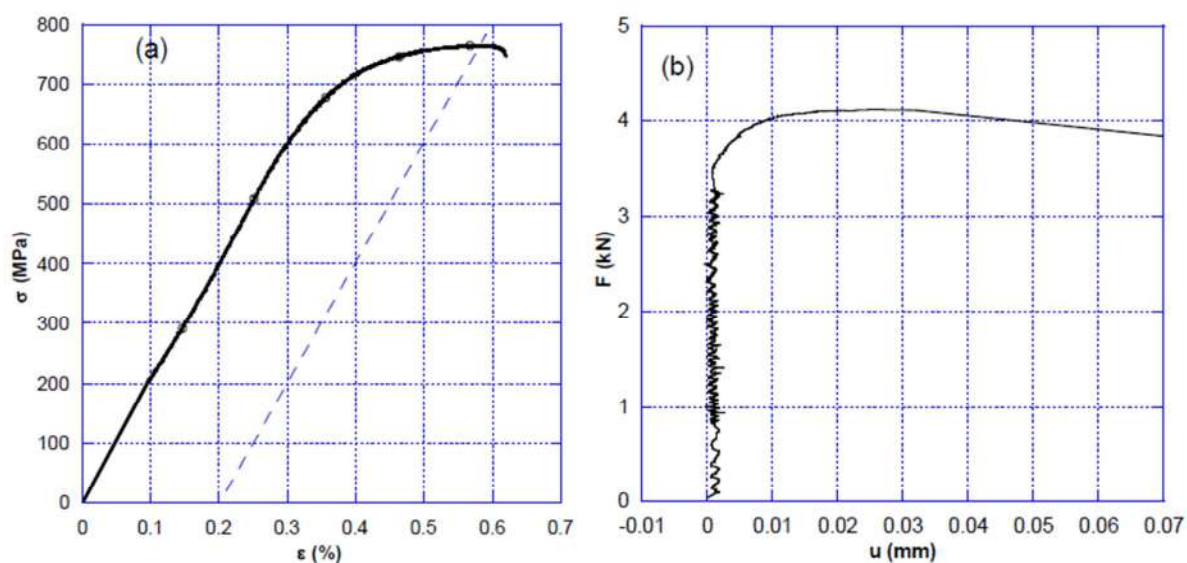


Figura 5.28 - Curva tensão versus deformação e o teste de arrancamento para o arame. (ALMEIDA et al.,2006)

Os corpos de prova para o teste do arrancamento consistem de primas com 50 x 50 x 75 mm com o arame inserido ao longo do eixo longitudinal. A figura acima apresenta a curva carga x escorregamento, como pode ser observado obteve uma tensão de aderência de 6,2 MPa.

5.3.1 Modelagem no ATENA 2D

Para essa viga foram criados elementos, do tipo CCIsoQuad, com o tamanho médio de 5 cm por 5 cm, como apresentado na Figura 5.29 para a modelagem em duas dimensões.

Todas as vigas desse experimento possuem a mesma quantidade de elemento, a diferença entre elas é a espessura que possui o elemento localizado na mesa superior da viga.

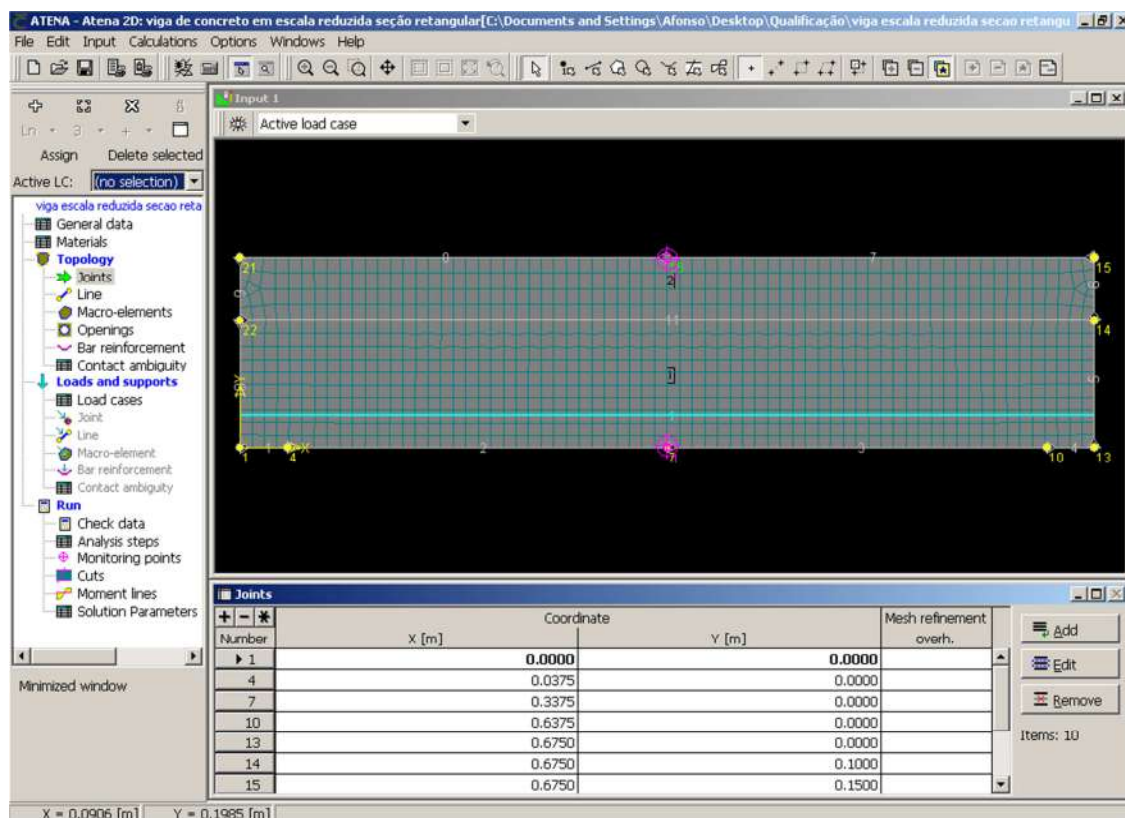


Figura 5.29 - Divisão da viga em elementos do tipo CClsoQuad.

Nas Figura 5.30Figura 5.31 são visualizados os apoios usados na modelagem e o carregamento de deformação imposta, respectivamente.

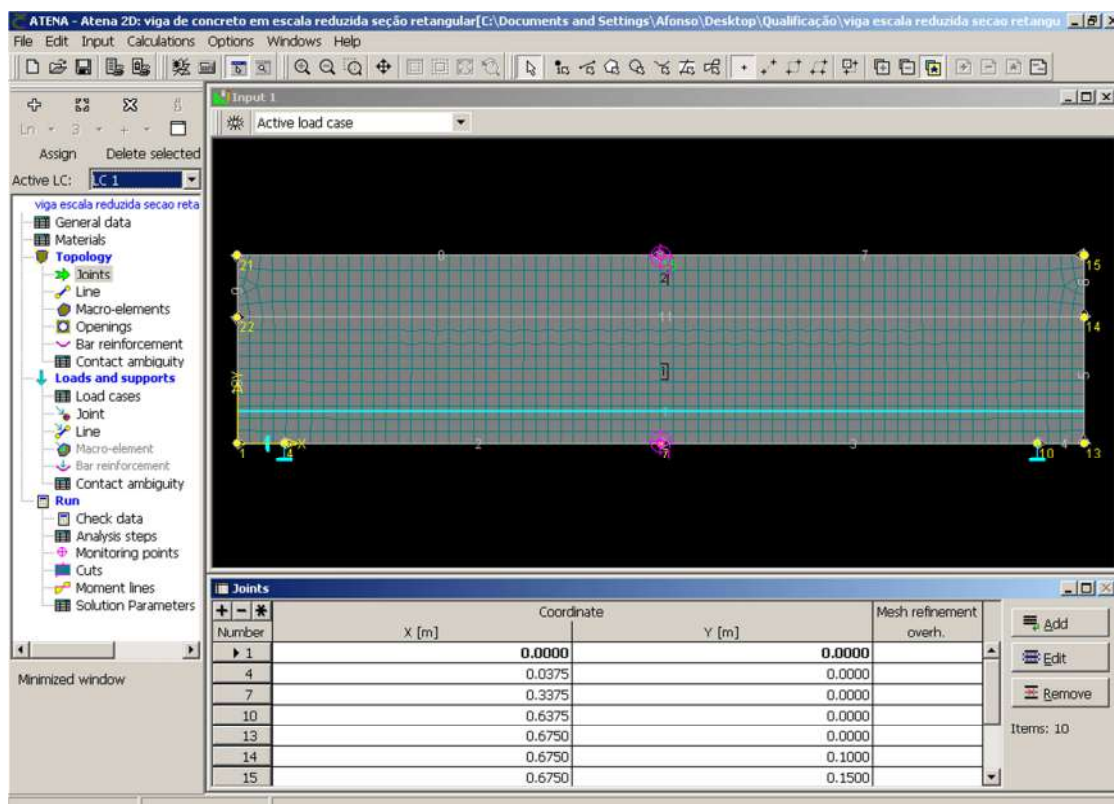


Figura 5.30 - Visualização dos apoios.

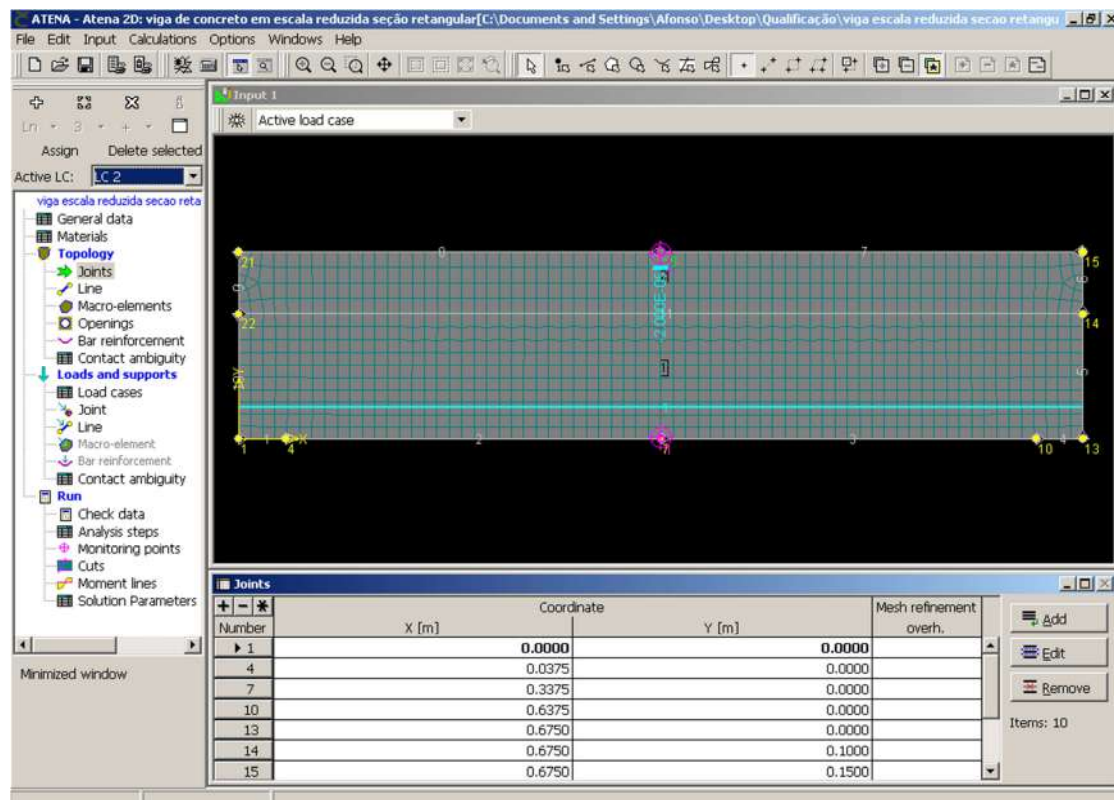


Figura 5.31 - Visualização da deformação imposta.

Na Figura 5.32 apresenta os pontos de integração dos elementos do tipo CCIsoQuad.

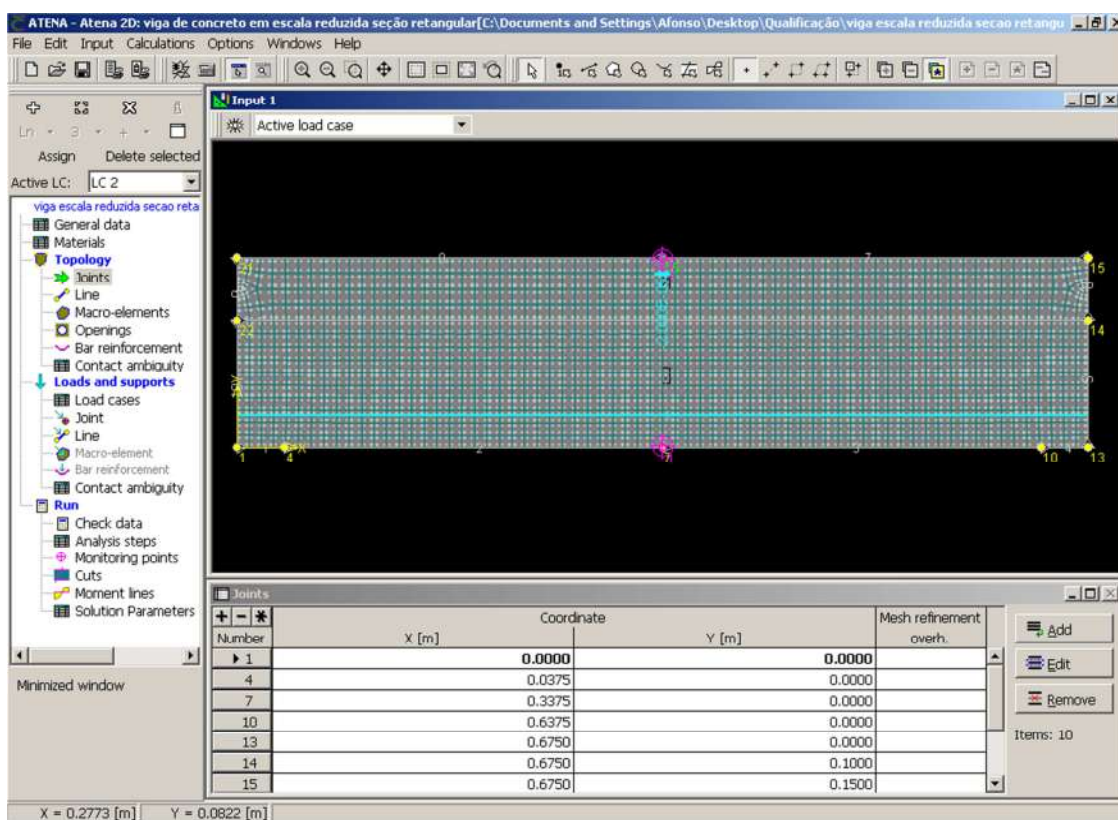


Figura 5.32 - Pontos de integração dos elementos.

As Figura 5.33 e Figura 5.36 apresentam os valores usados nos parâmetros de entrada para o concreto nesse caso.

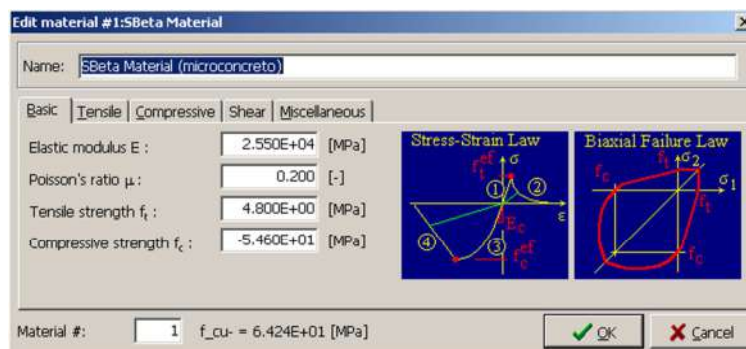


Figura 5.33 - Parâmetros de entrada.

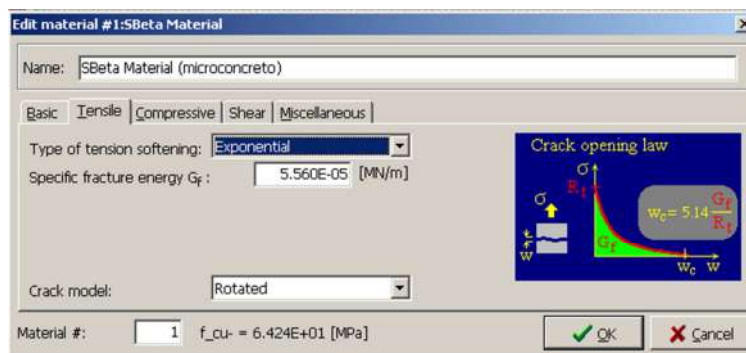


Figura 5.34 - Parâmetros de entrada.

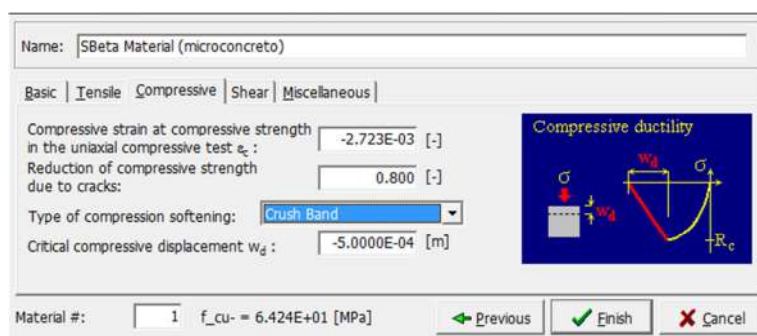


Figura 5.35 - Parâmetros de entrada.

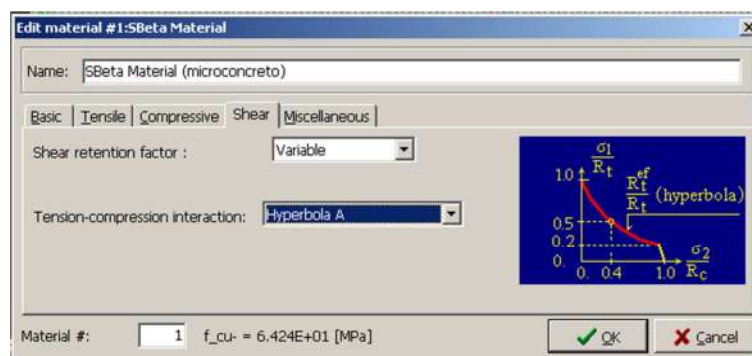


Figura 5.36 - Parâmetros de entrada.

5.3.2 Modelagem no ATENA 3D

Na modelagem em três dimensões dessas vigas foram criados elementos, do tipo CCIsoBrick, com o tamanho médio de 0,75 cm por 0,75 cm, como apresentado na Figura 5.37 - . Também nessa mesma figura é possível ver as restrições de deslocamentos utilizadas nos apoios e na consideração de simetria da viga para a análise.

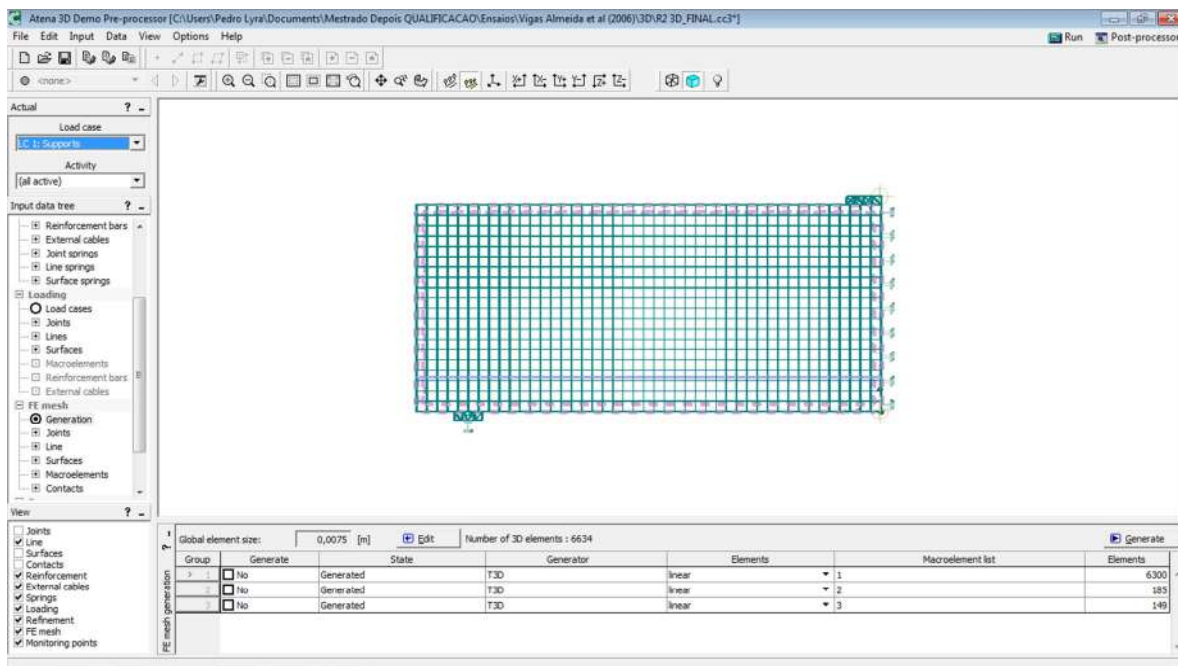


Figura 5.37 - Divisão da viga em elementos do tipo CCIsoBrick.

Os parâmetros de entrada para a definição do concreto e do aço foram os mesmos utilizados para a modelagem em duas dimensões.

5.3.3 Resultados

5.3.3.1 Viga R2

A Figura 5.38 apresenta a comparação, através do gráfico da carga versus deslocamento vertical, entre o resultado obtido pelo programa ATENA e obtido no experimento realizado.

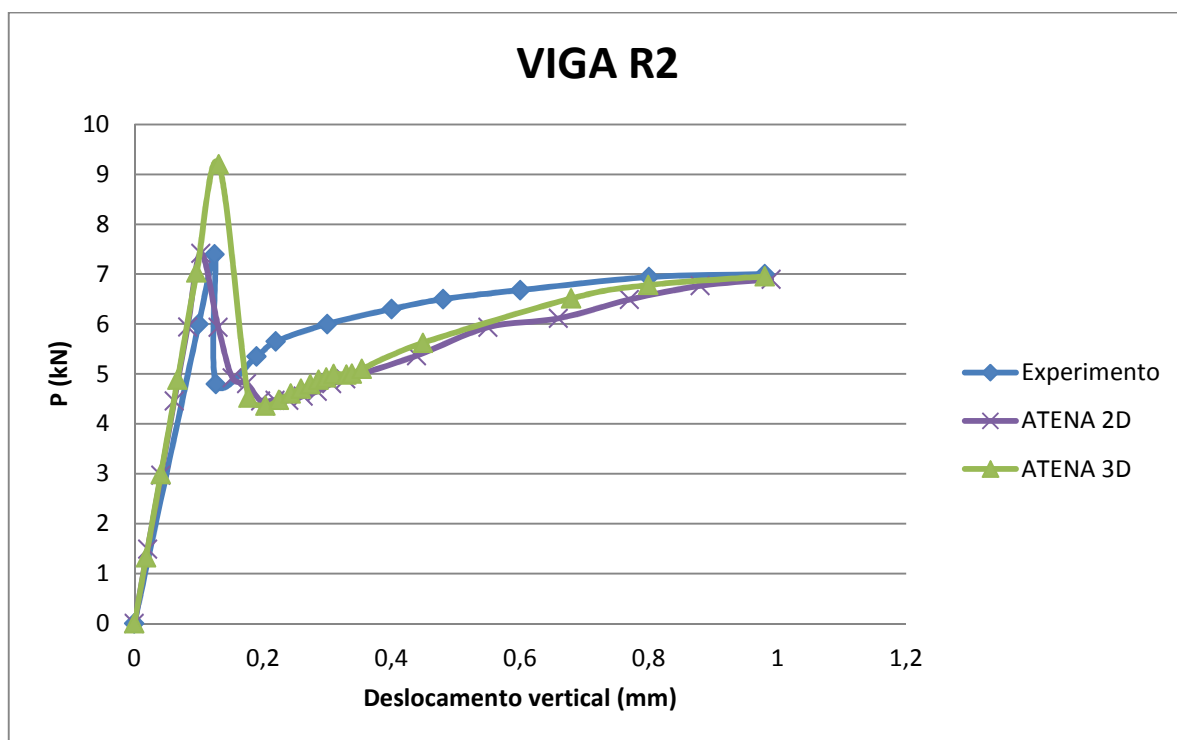


Figura 5.38 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.

A Tabela 5.5 apresenta o resumo dos resultados obtidos em cada modelo.

Tabela 5.5 - Resumo das cargas máximas obtidas em cada modelo.

	Carga máxima (kN)	Desvio
ATENA 2D	7,418	3,6%
ATENA 3D	9,202	28,5%

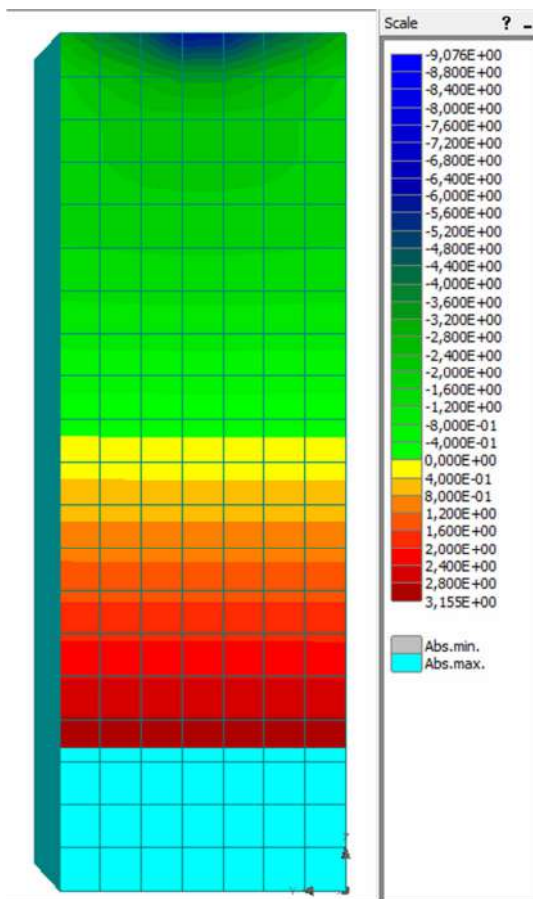


Figura 5.39 – Sigma xx antes do efeito de “snap-through”.

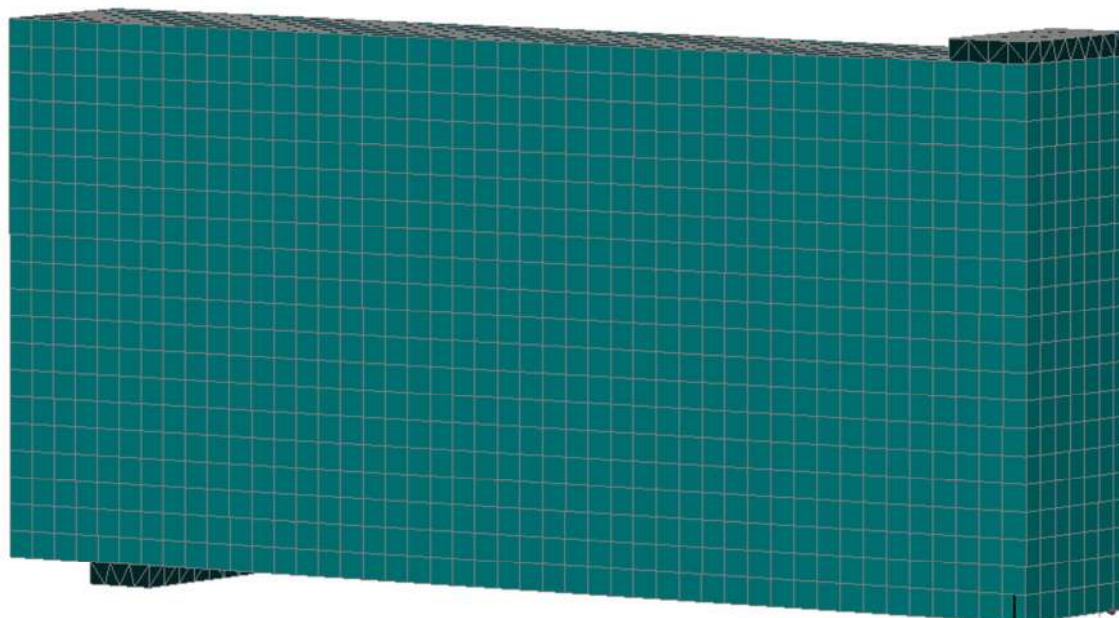


Figura 5.40 - Padrão de fissuração antes do efeito de “snap-through” obtido pelo programa ATENA 3D.

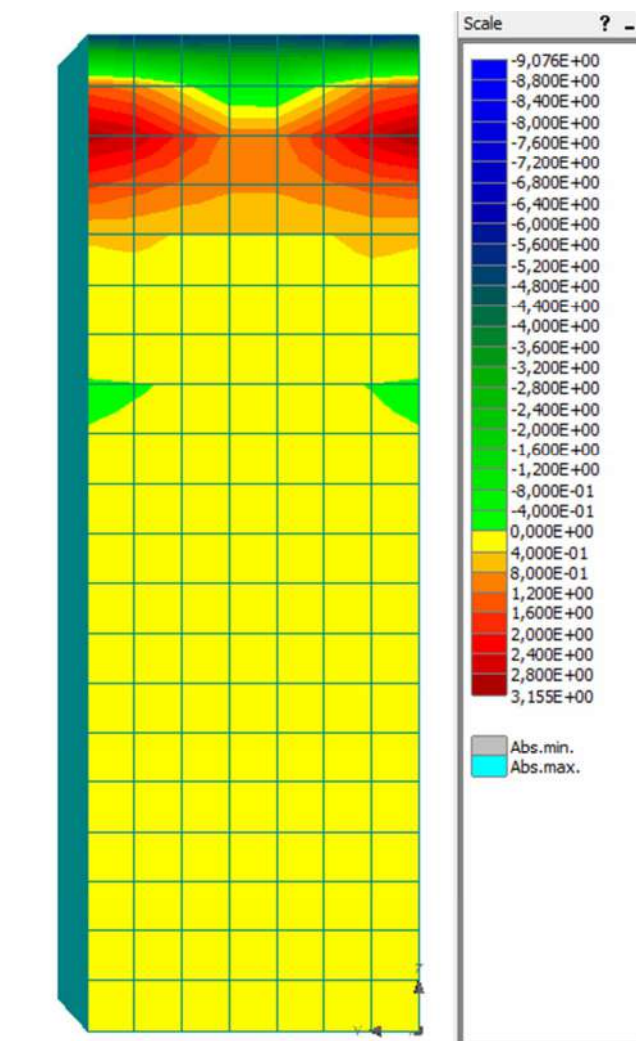


Figura 5.41 – Sigma xx próximo da ruptura.

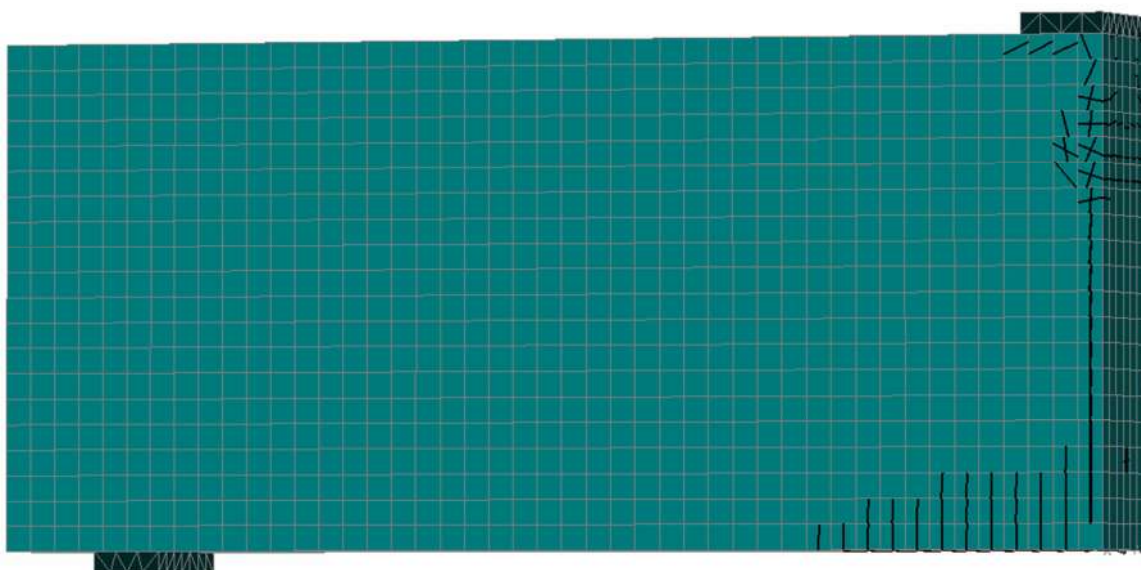


Figura 5.42 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 3D.

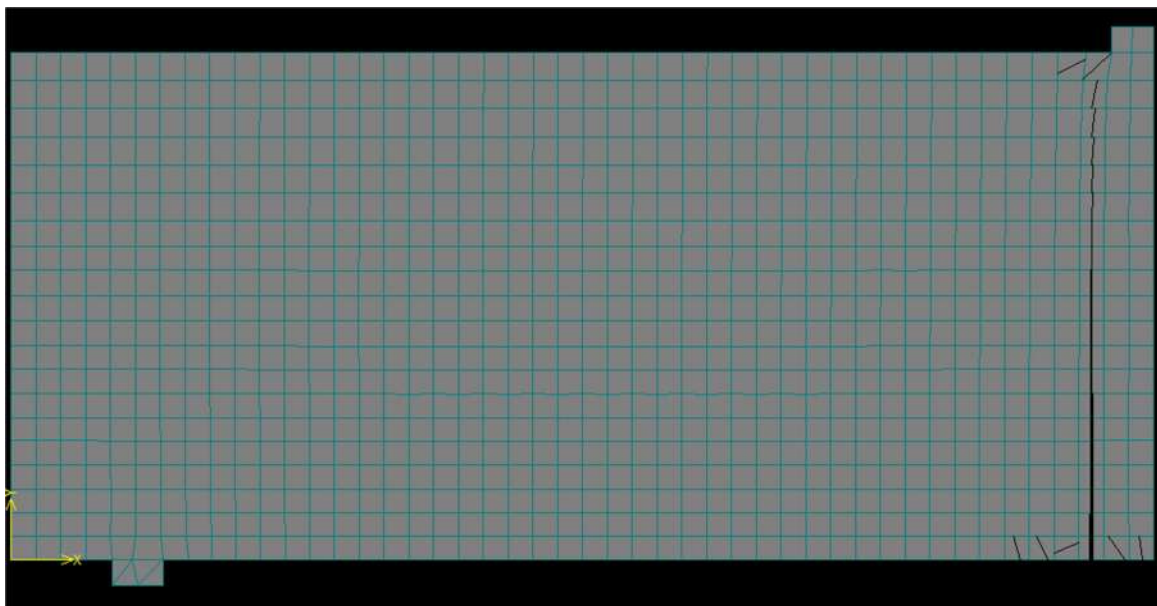


Figura 5.43 – Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 2D.

5.3.3.2 Viga TP2

A Figura 5.44 apresenta a comparação, através do gráfico de carga versus deslocamento vertical, entre o resultado obtido pelo programa ATENA e obtido no experimento realizado.

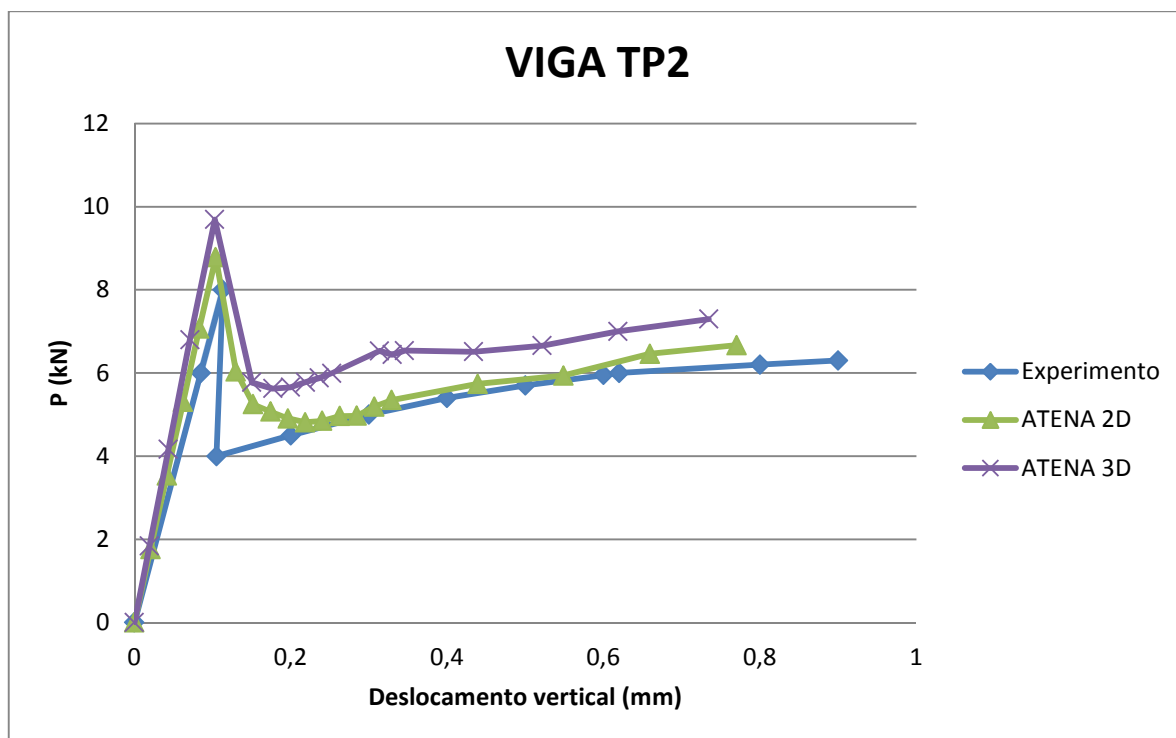


Figura 5.44 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.

A Tabela 5.6 apresenta o resumo dos resultados obtidos em cada modelo.

Tabela 5.6 - Resumo das cargas máximas obtidas em cada modelo.

	Carga máxima (kN)	Desvio
ATENA 2D	8,782	9,8%
ATENA 3D	9,692	21,2%

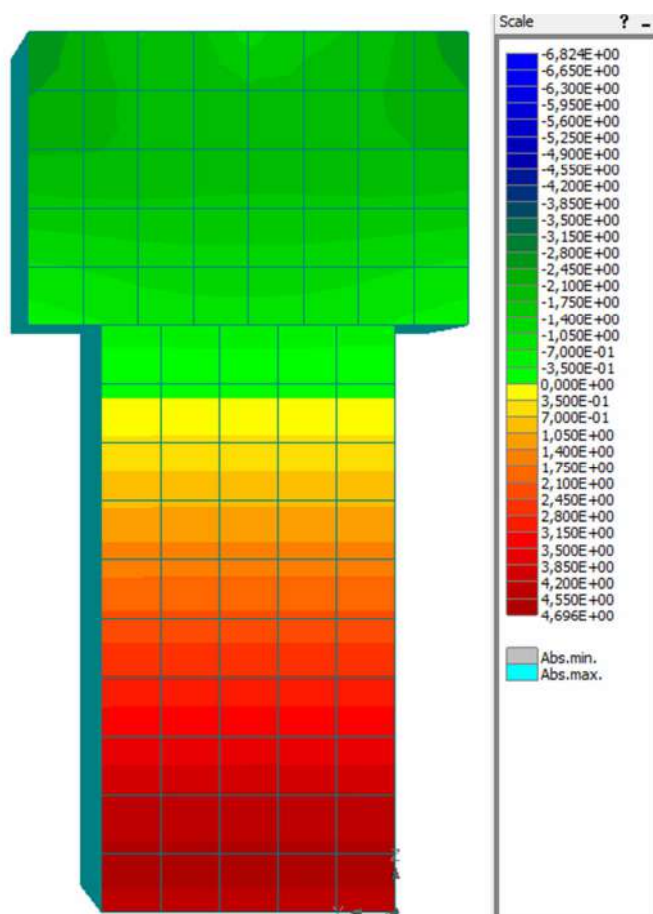


Figura 5.45 - σ_{xx} antes do efeito de "snap-through".

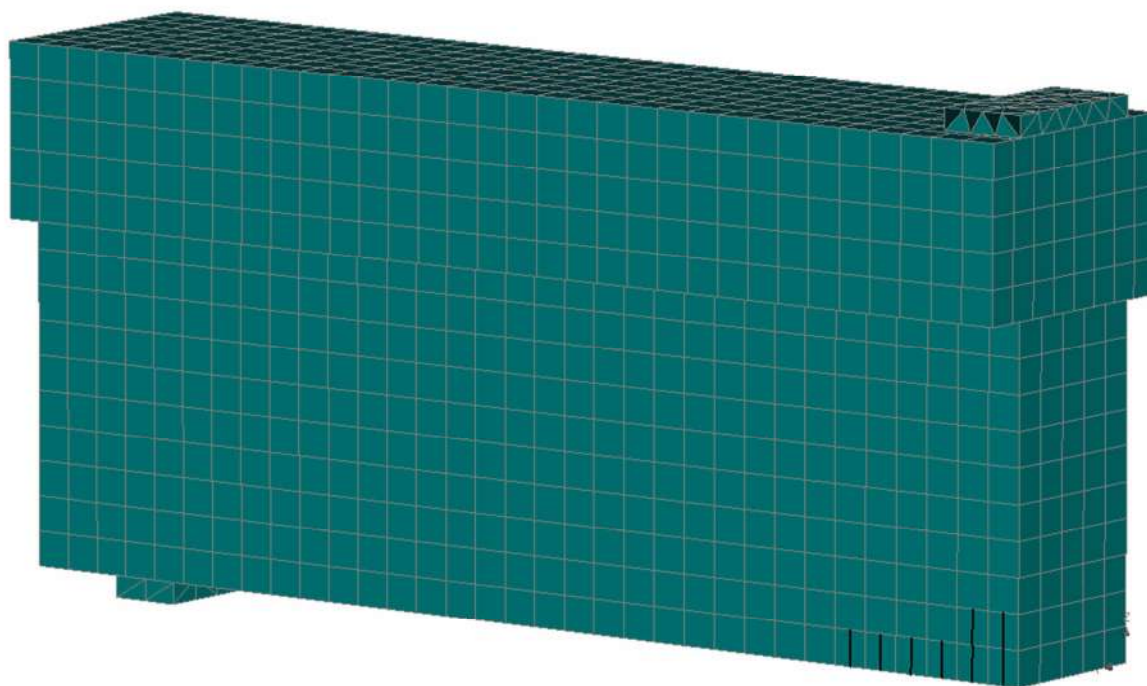


Figura 5.46 - Padrão de fissuração antes do efeito de "snap-through" obtido pelo programa ATENA 3D.

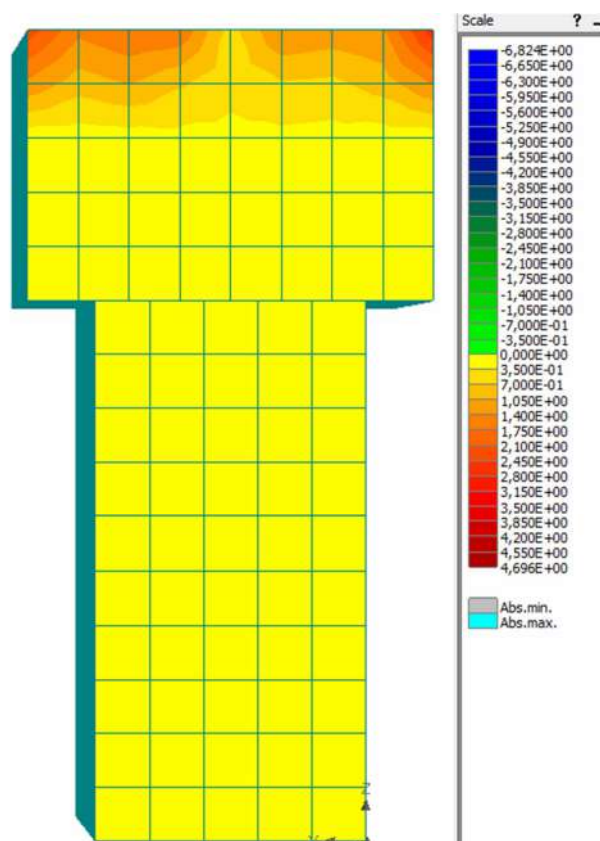


Figura 5.47 - Sigma xx próximo da ruptura.

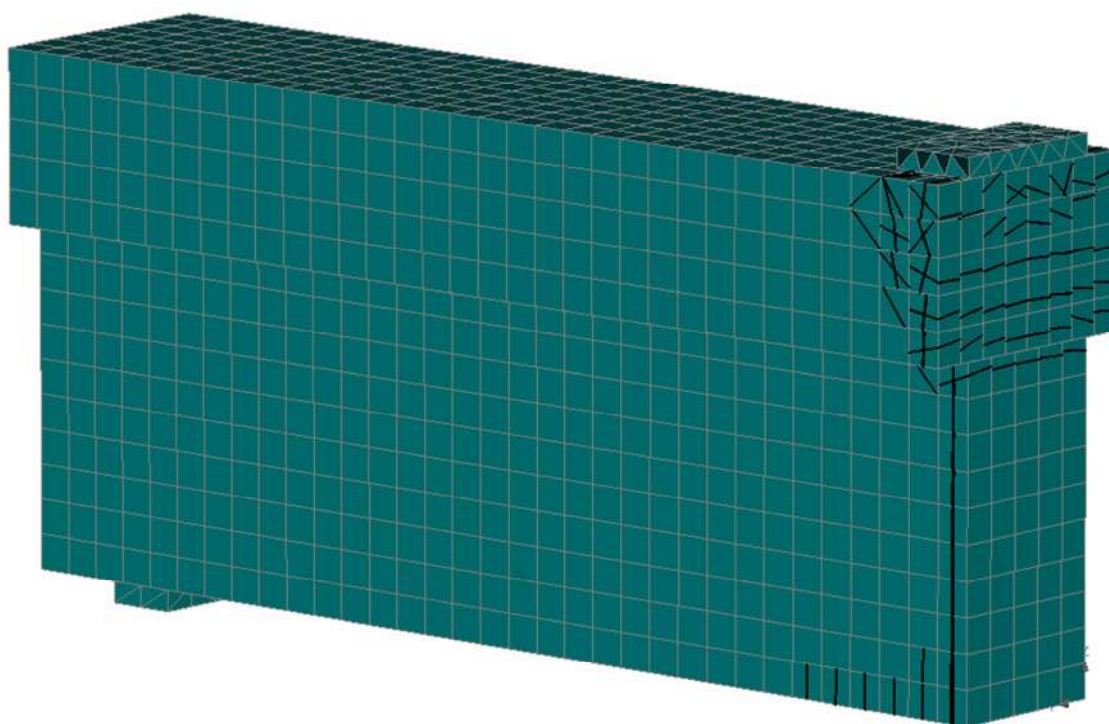


Figura 5.48 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 3D.

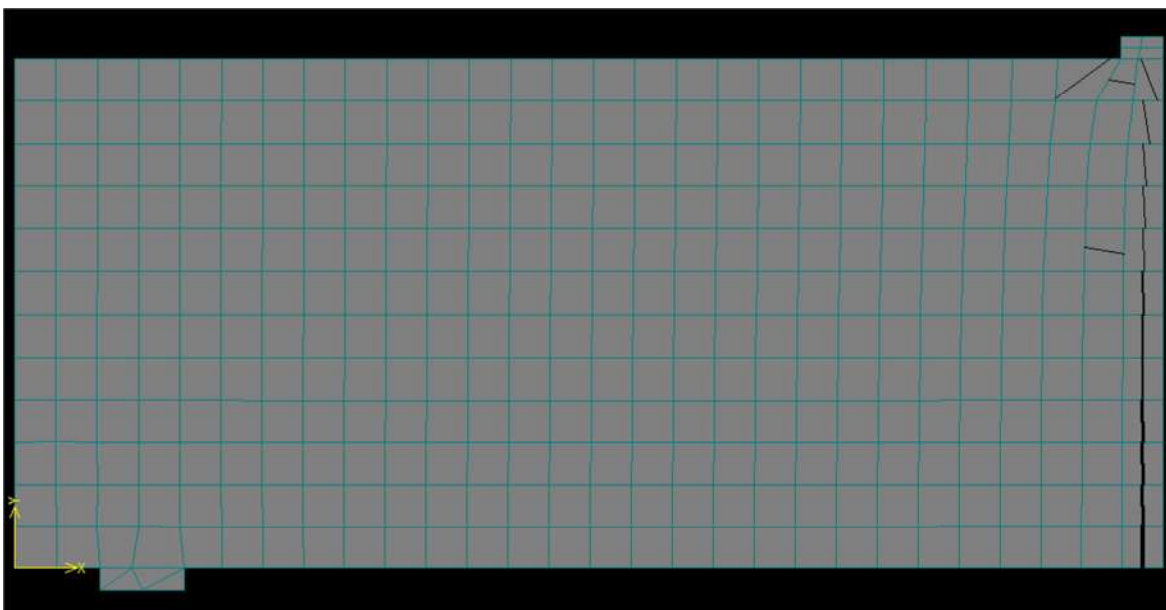


Figura 5.49 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 2D.

5.3.3.3 Viga TM2

A Figura 5.50 apresenta a comparação, através do gráfico da carga versus deslocamento vertical, entre o resultado obtido pelo programa ATENA e obtido no experimento realizado.

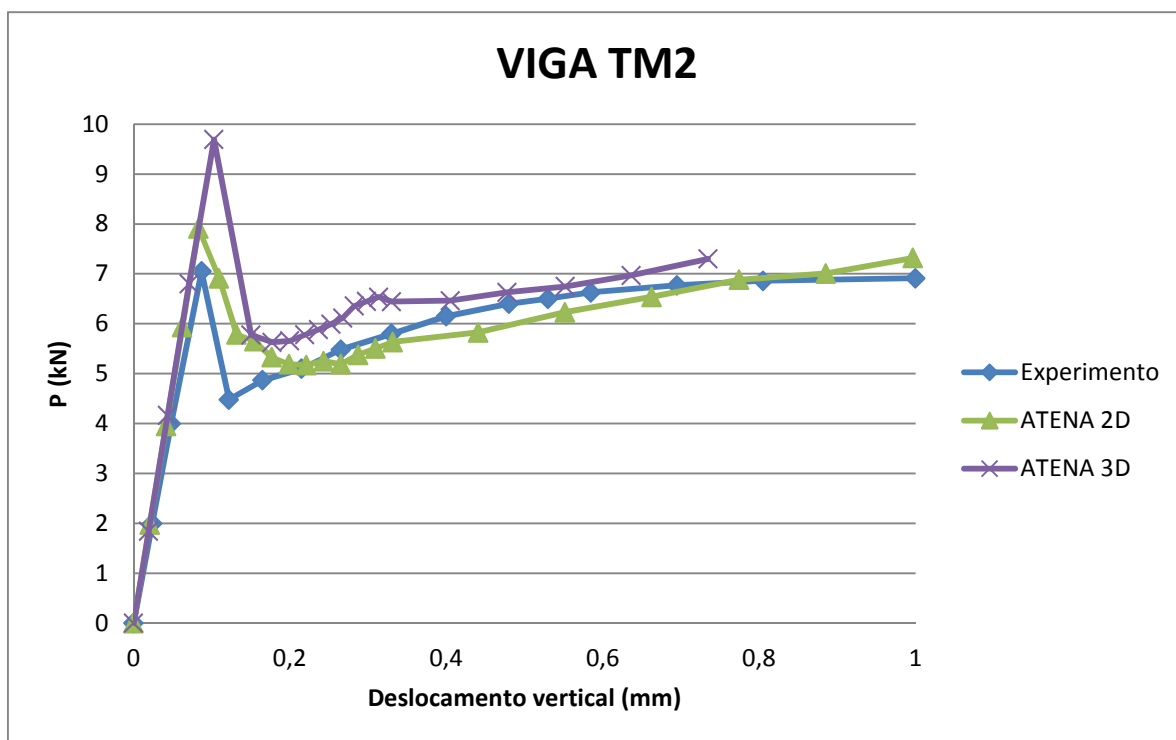


Figura 5.50 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.

A Tabela 5.7 apresenta o resumo dos resultados obtidos em cada modelo.

Tabela 5.7 - Resumo das cargas máximas obtidas em cada modelo.

	Carga máxima (kN)	Desvio
ATENA 2D	7,91	12,2%
ATENA 3D	9,692	37,5%

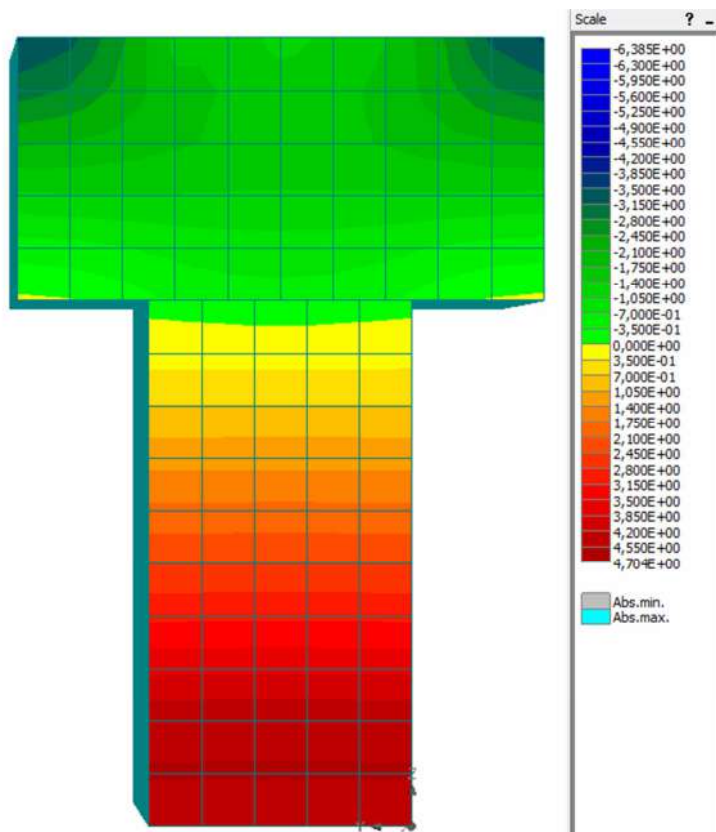


Figura 5.51 - Sigma xx antes do efeito de "snap-through".

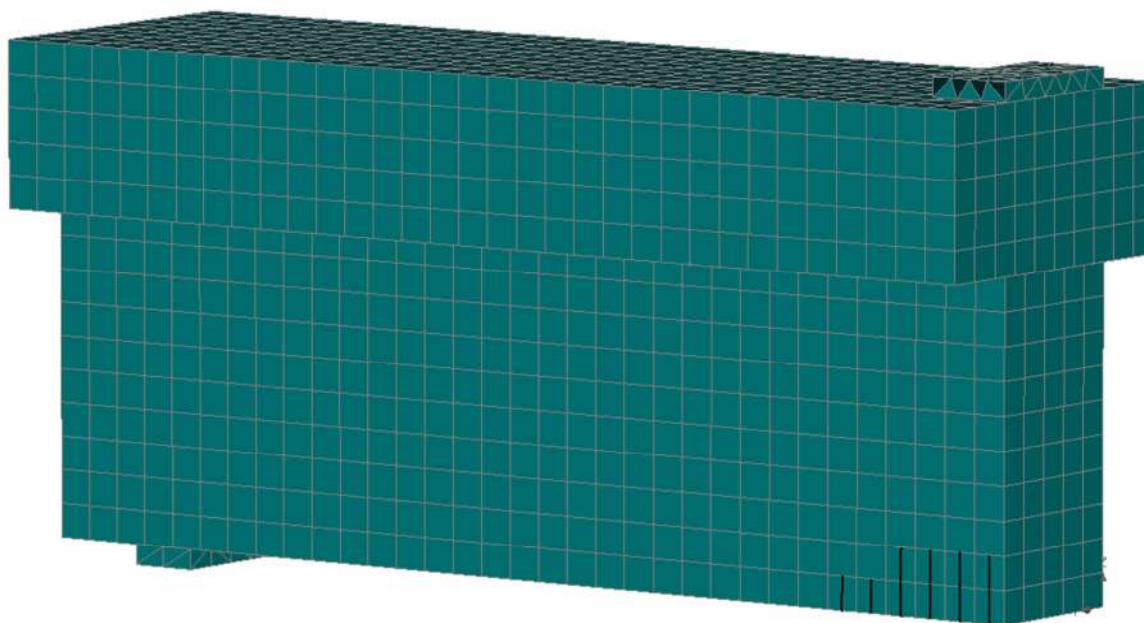


Figura 5.52 - Padrão de fissuração antes do efeito de "snap-through" obtido pelo programa ATENA 3D.

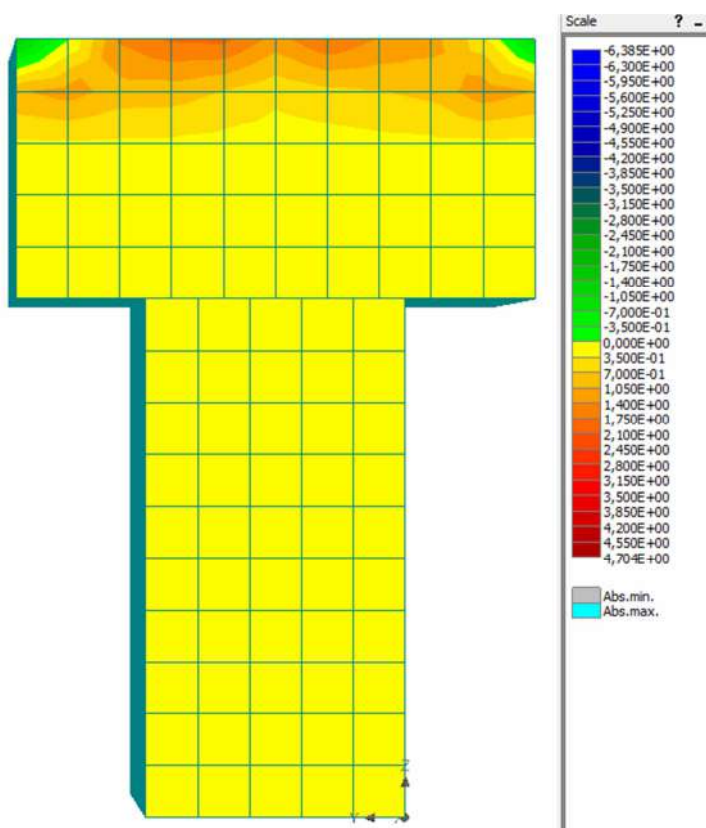


Figura 5.53 - Sigma xx próximo da ruptura.

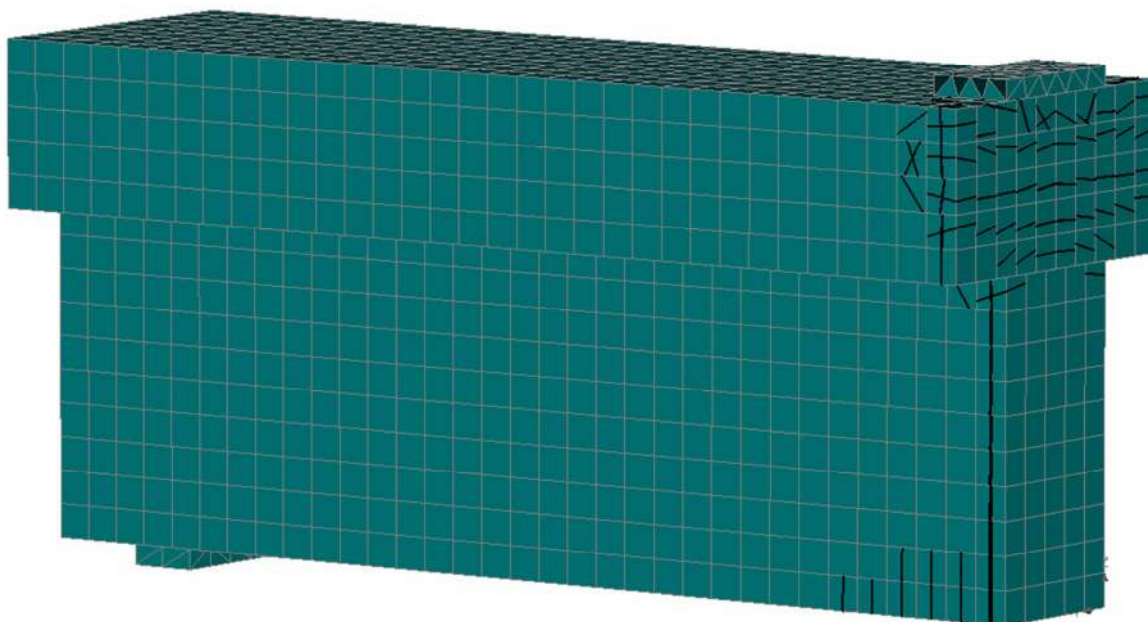


Figura 5.54 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 3D.

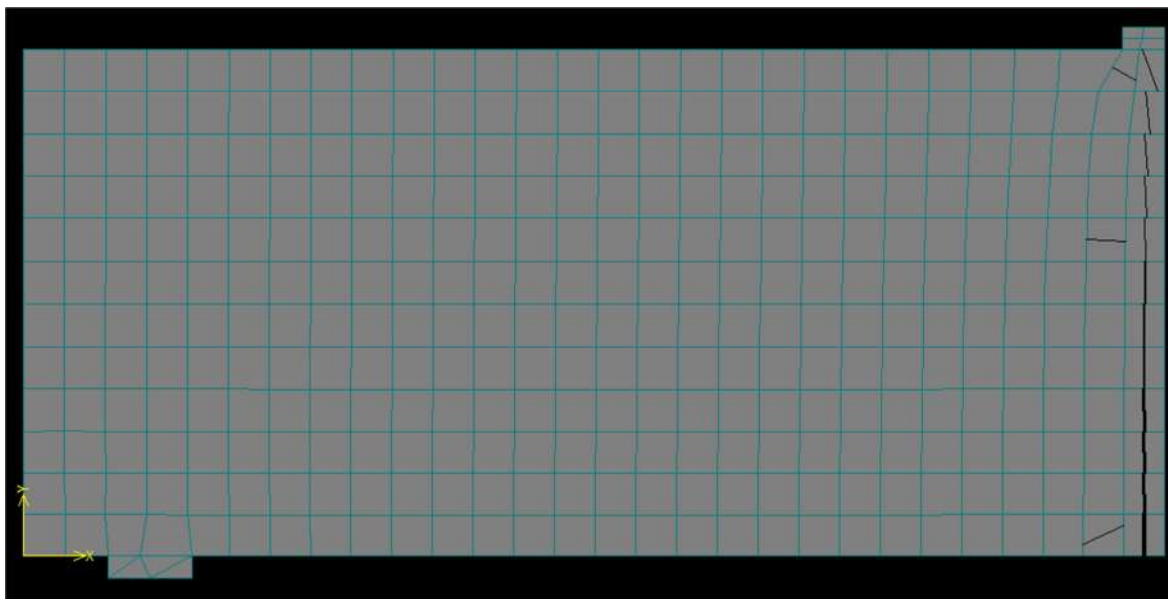


Figura 5.55 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 2D.

5.3.3.4 Viga TG2

A Figura 5.56 apresenta a comparação, através do gráfico da carga versus deslocamento vertical, entre o resultado obtido pelo programa ATENA e obtido no experimento realizado.

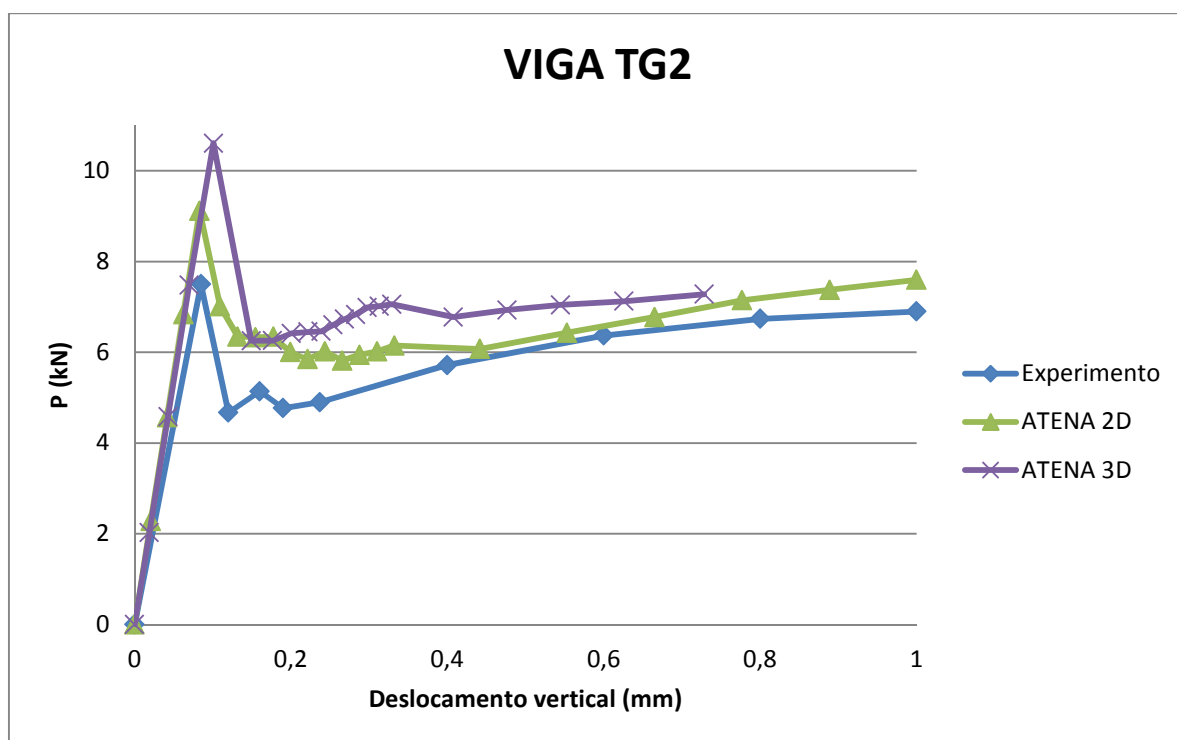


Figura 5.56 - Gráfico comparando o resultado obtido com o ATENA versus o experimental.

A Tabela 5.8 apresenta o resumo dos resultados obtidos em cada modelo.

Tabela 5.8 - Resumo das cargas máximas obtidas em cada modelo.

	Carga máxima (kN)	Desvio
ATENA 2D	9,118	21,6%
ATENA 3D	10,606	41,4%

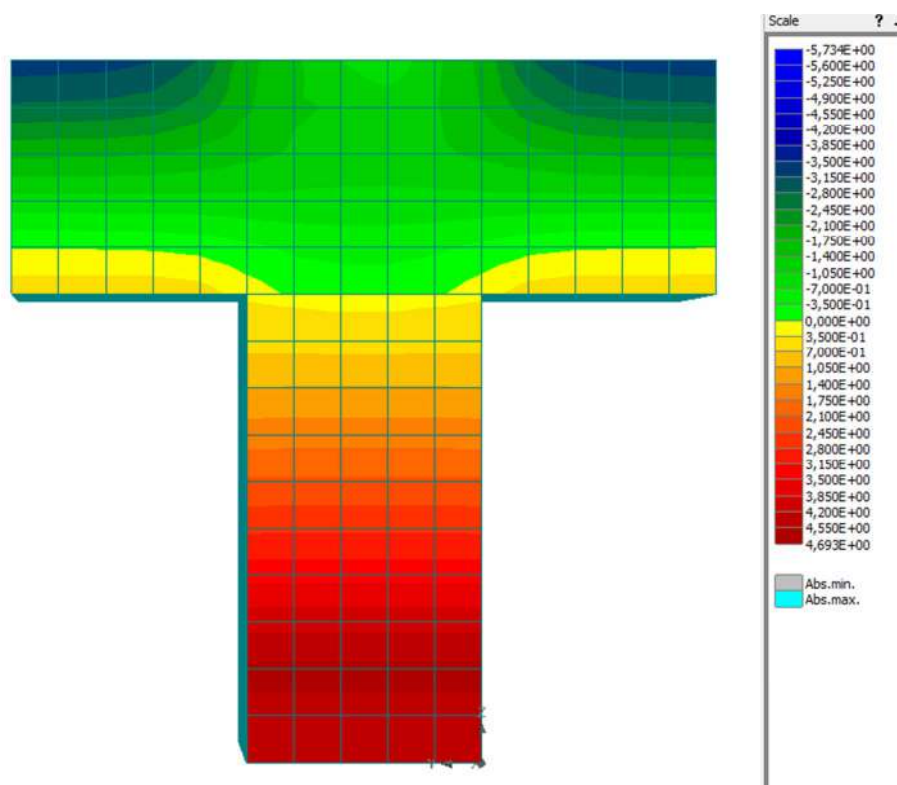


Figura 5.57 - Sigma xx antes do efeito de “snap-through”.

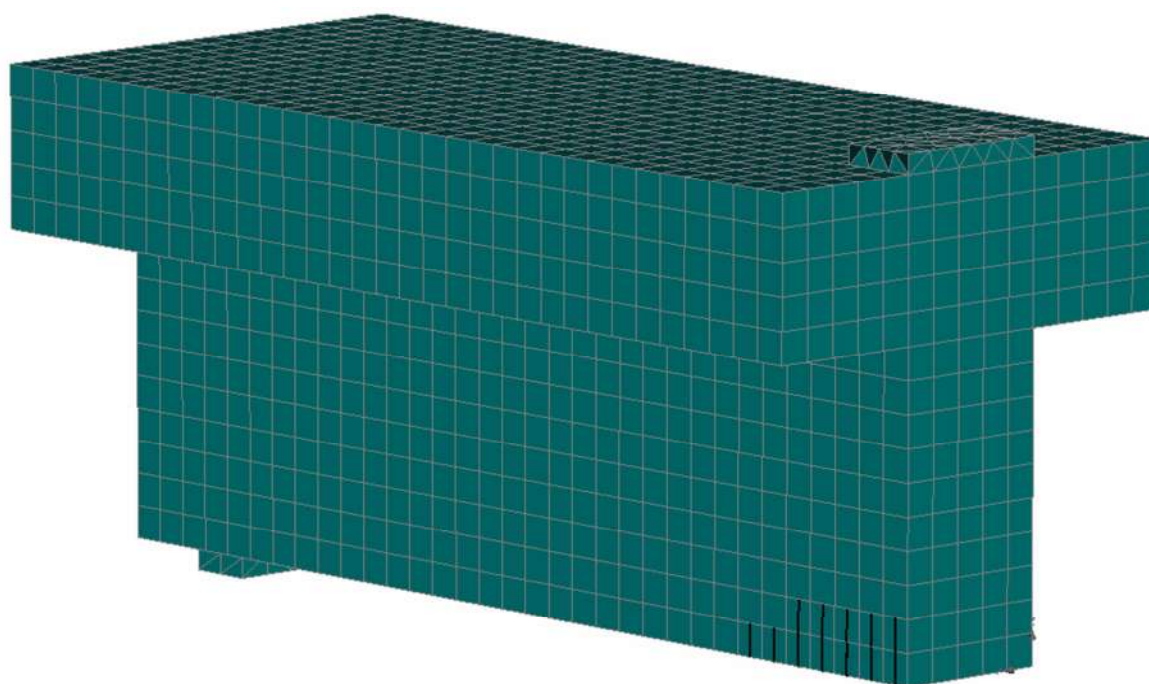


Figura 5.58 - Padrão de fissuração antes do efeito de “snap-through” obtido pelo programa ATENA 3D.

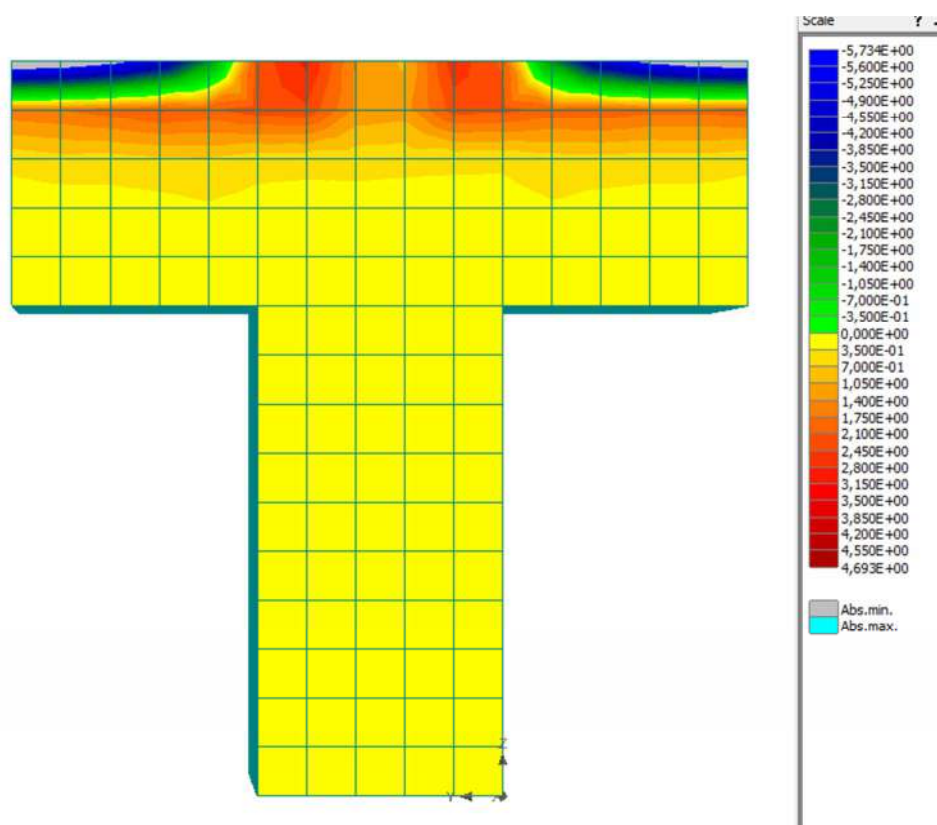


Figura 5.59 - Sigma xx próximo da ruptura.

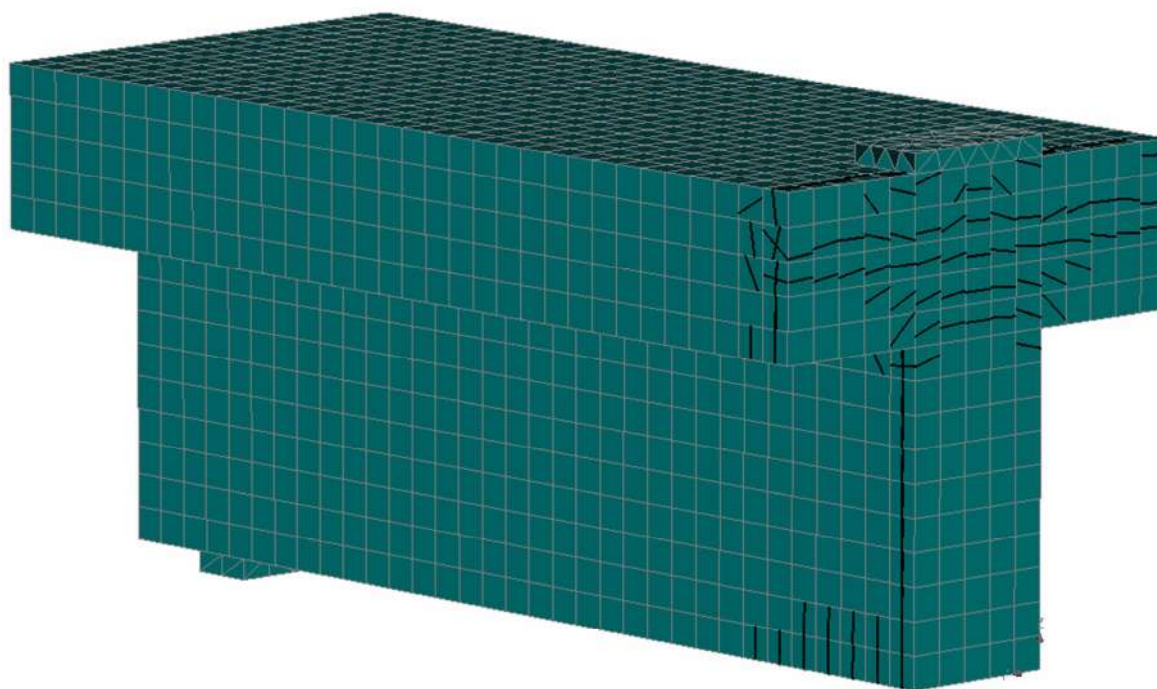


Figura 5.60 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 3D.

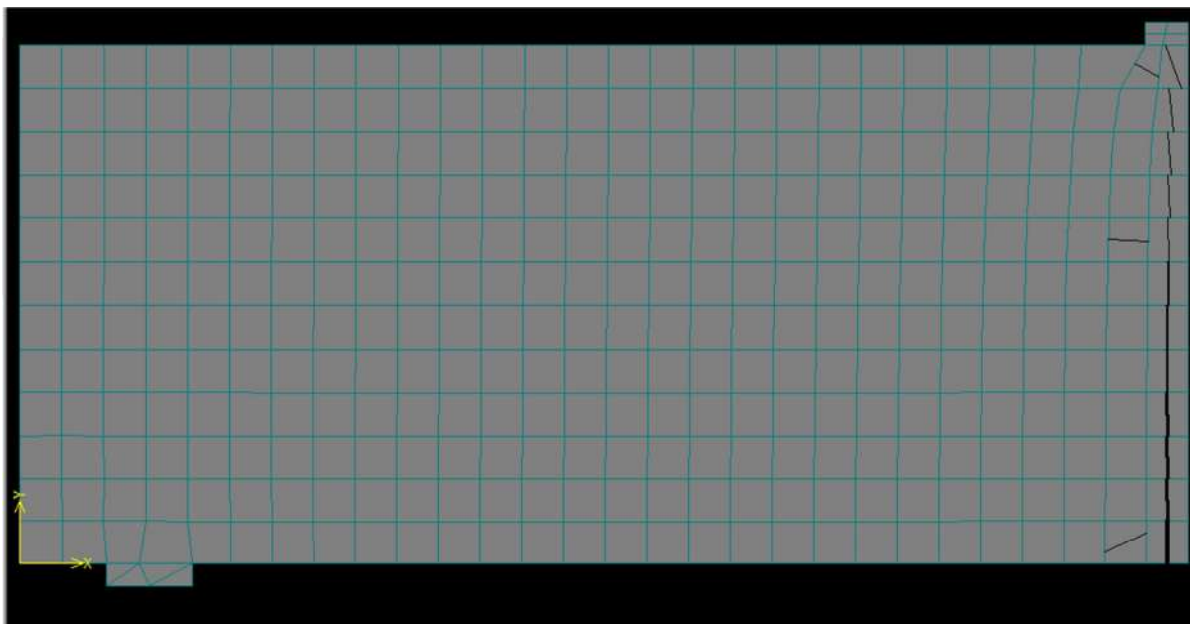


Figura 5.61 - Padrão de fissuração próximo a ruptura obtido pelo programa ATENA 2D.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Conclusão

No presente trabalho foram abordados três tipos de modelos de análise não linear física do material concreto armado e, pelo estado da arte, sabe-se que o modelo que mais se aproxima da realidade física é o modelo de fissuras rotacionais. Então se optou neste trabalho utilizar os modelos de fissura fixa e rotacional para as análises para compará-los.

Foram utilizados dois modelos constitutivos, SBETA e de fratura plástica, para a modelagem bidimensional e tridimensional respectivamente.

O modelo constitutivo SBETA leva em conta em sua formulação o estado plano de tensões, isto é, supõe que as tensões que atuam no eixo z são iguais à zero. Com essa hipótese adotada, o modelo bidimensional não leva o efeito de confinamento existente nas estruturas reais.

O modelo de fratura plástica inclui o modelo de fissura distribuída, esse modelo também é incluído no SBETA, para o concreto fissurado e o modelo de plasticidade de Menétrey-Willam para o esmagamento do concreto. Esse modelo leva em consideração o efeito de confinamento existente nas estruturas de concreto armado. O Método do comprimento de arco como método de solução de análise não linear, mostrou-se estável, nos experimentos modelados, para vencer os problemas de estabilidade numérica que deve ser mantida em todas as regiões, incluindo aquelas próximas aos pontos críticos.

Os resultados da modelagem da viga de LEONHARDT e WALTHER (1962) mostraram que o modelo bidimensional de fissura fixa foi o modelo que obteve uma ótima concordância entre os resultados numéricos e aqueles obtidos através do ensaio experimental, a diferença entre o valor da carga última foi de 8% e do deslocamento vertical último foi de 1%. No modelo de fissura rotacional obteve-se um erro de 43% para a carga última e 52% para o deslocamento vertical último e no modelo tridimensional um erro de 53% para a carga última e 10% para o deslocamento vertical último.

Verificou-se que o padrão de fissuração do modelo de fissura fixa aproximou do que foi visto na viga durante o experimento.

Para a viga OA1 de BRESLER e SCORDELIS (1963), novamente o modelo bidimensional de fissura fixa foi o modelo que obteve uma ótima concordância entre os resultados numéricos e aqueles obtidos através do ensaio experimental, a diferença entre o valor da carga última foi de 1,3% e do deslocamento vertical último foi de 0,11%. No modelo de fissura rotacional obteve-se um erro de 22% para a carga última e 4% para o deslocamento vertical último e no modelo tridimensional um erro de 55% para a carga última e 5% para o deslocamento vertical último.

Nos resultados do experimento de ALMEIDA et al (2006), através de todos os ensaios apresentados no capítulo 5 observou-se, pelos gráficos obtidos, que o modelo bidimensional chegou mais próximo da realidade do que o modelo tridimensional.

Apesar da formulação do modelo tridimensional levar em conta o efeito de mesa colaborante na compressão, nos resultados apresentados não foi possível verificar esse efeito comparando os resultados.

A diferença encontrada entre a carga máxima obtida pelo experimento e o obtido pela simulação numérica bidimensional varia de 3,6% a 12,6%. Já a diferença encontrada entre a carga máxima obtida pelo experimento e o obtido pela simulação numérica tridimensional varia de 21,2% a 41,4%.

A diferença entre os resultados do modelo bidimensional de fissura fixa e móvel foi de acordo com o descrito na literatura, isto é, os resultados obtidos pelo modelo de fissura fixa obtiveram valores de carga maiores que o outro modelo. Esse fato dá-se porque a formulação de fissura fixa considera que a primeira fissura que aparecer na estrutura é que vai continuar até a ruptura da mesma.

Também é possível verificar que os modelos tridimensionais são mais rígidos que os modelos bidimensionais, isto porque esses modelos levam em conta o efeito de confinamento que existe numa estrutura real ao contrário dos modelos bidimensionais que utilizam a hipótese do estado plano de tensão. O único experimento que não mostrou esse resultado foi a viga de BRESLER e SCORDELIS (1963) porque os parâmetros utilizados nos critérios de ruptura não estão satisfatórios para esse experimento.

Pode-se dizer que, quando utilizado corretamente os parâmetros de entrada dos modelos constitutivos, o programa ATENA consegue descrever bem a resposta do concreto submetido a diversos tipos de carregamentos, sendo capaz de representar o esmagamento e a fissuração do concreto.

6.2 Trabalhos futuros

Como sugestões para a continuação da pesquisa, podem-se citar os itens mencionados abaixo:

- Modelagem numérica de outros elementos estruturais, como pilares, placas e vigas-paredes;
- Aplicação de carregamentos cíclicos para a verificação do algoritmo para a armadura;
- Utilização de outros modelos constitutivos fornecidos pelo programa e comparar com os resultados obtidos neste trabalho.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Luiz Carlos de et al. **Experimental study on the influence of the shape of the cross-section on the fracture of lightly reinforced concrete beams.** In: CONGRESSO SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS Y SUS APLICACIONES, ALMEIDA, 2006, Santa Fe. Proceedings. Santa Fe: 2006.

ANDOLFATO, Rodrigo Piernas. **Desenvolvimento das técnicas de produção de blocos de concreto de alvenaria estrutural na escala (1:4).** 2002. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Ilha Solteira, 2002.

ATENA 2000. **ATENA Program Documentation, Part 1 - Theory,** Cervenka Consulting, Prague, Czech Republic

BAZANT, Z.P, OH, B.H (1983) - **Crack Band Theory for Fracture of Concrete,** Materials and Structures, RILEM, Vol. 16, 155-177.

BIGAL, A.J (1999). **Structural Dependence of Rotation Capacity of Plastic Hinges in RC Beams and Slabs,** PhD Thesis, Delft University of Technogy, ISBN 90-407-1926-8.

BITENCOURT JÚNIOR, L. A. G. **Desenvolvimento de uma plataforma computacional para análise via método dos elementos finitos de estruturas de concreto armado e reforçado com fibras de aço.** 2009. 156 p. Dissertação. Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia e Geotecnia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

BITTENCOURT, Tulio Nogueira. **Faturamento do concreto estrutural: Aspectos teóricos, computacionais e experimentais, e suas aplicações.** 1999. 226 f. Tese de Livre Docência (Coconcurso) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Usp, São Paulo, 1999.

CEB-FIP Model Code 1990, First Draft, Committee Euro-International du Beton, Bulletin d'information No. 195,196, Mars.

CERVENKA, Vladimir; CERVENKA, Jan; PUKL, Radomir. **ATENA - A tool for engineering analysis of fracture in concrete**. Sadhana: Academy proceedings in engineering science, Springer India, p. 485-492. 1 ago. 2002.

CERVENKA, V. (1985) - **Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete**, Journal ACI, Proc. V.82, Nov-Dec., No.6,pp.877-882.

CERVENKA, V., PUKL, R., ELIGEHAUSEN, R. (1991) - **Fracture Analysis of Concrete plane Stress Pull-out Tests**, Proceedings, Fracture process in Brittle Disordered Materials, Noordwijk, Holland, June 19-21.

CERVENKA, V., PUKL, R., OZBOLT, J., ELIGEHAUSEN, R. (1995), **Mesh Sensitivity Effects in Smeared Finite Element Analysis of Concrete Structures**, Proc. FRAMCOS 2, 1995, pp 1387-1396.

CERVENKA, V., PUKL, R. (1992) - **Computer Models of Concrete Structures**, Structural Engineering International, Vol.2, No.2, May 1992. IABSE Zürich, Switzerland, ISSN 1016 - 8664, pp.103-107.

CERVENKA, V., PUKL, R., OZBOLT, J., ELIGEHAUSEN, R. (1995) - **Mesh Sensitivity Effects in Smeared Finite Element Analysis of Concrete Fracture**, Proceedings of FRAMCOS2, Zurich, Aedificatio.

CERVENKA, V., CERVENKA, J. (1996) - **Computer Simulation as a Design Tool for Concrete Structures**, ICCE-96, proceedings of The second International Conference in Civil Engineering on Computer Applications Research and Practice, 6-8 April, Bahrain.

CLARKE, J. L.; GARAS, F. K.; ARMER, G. S. T. (Org.). **Design of concrete structures: the use of model analysis**. Barking, Uk: Elsevier Applied Science Publishers, 1985. 380 p.

CHEN, W.F, SALEEB, A.F. (1982) - **Constitutive Equations For Engineering Materials**, John Willey & Sons, ISBN 0-471-09149-9.

DE BORST, R. (1986), **Non-linear analysis of frictional materials**, Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, 1986.

DYNGELAND, T. (1989) - **Behavior of Reinforced Concrete Panels**, Dissertation, Trondheim University, Norway, BK-report 1989:1

FUINA, Jamile Salim. **MÉTODOS DE CONTROLE DE DEFORMAÇÕES PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS**. 2004. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós- Graduação em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal De Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

HARRIS, Harry G.; SABNIS, Gajanan M.. **Structural Modeling and Experimental Techniques**. 2nd ed. Philadelphia, Pennsylvania: Crc Press, 1999. 789 p.

Hordijk D A 1991 **Local approach to fatigue of concrete**. Ph D thesis, Delft University of Technology, Delft.

KWAK, Hyo-gyoung; FILIPPOU, Filip C.. **Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads**. California: Department Of Civil Engineering University Of California, 1999.

KOLLEGER, J. - MEHLHORN, G. (1988) - **Experimentelle und Analytische Untersuchungen zur Aufstellung eines Materialmodels für Gerissene Stahbetonscheiben**, Nr.6 Forschungsbericht, Massivbau, Gesamthochschule Kassel.

KUPFER, H., HILSDORF, H.K., RÜSCH, H. (1969) - **Behavior of Concrete under Biaxial Stress**, Journal ACI, Proc. V.66,No.8, Aug., pp.656-666.

Leonhardt and Walther, **Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und Ohne Schubbewehrung**, Deutscher Ausschuss fuer Stahlbeton, Heft 51, Berlin 1962, Ernst&Sohn.

MIER J.G.M van (1986) - **Multiaxial Strain-softening of Concrete**, Part I: fracture, Materials and Structures, RILEM, Vol. 19, No.111.

SILVA, Patrick Perez Ramos. **IMPLEMENTAÇÃO DE MODELOS DE MICROPLANOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO, UMA ABORDAGEM ORIENTADA A OBJETOS**. 2002. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal De Minas Gerais, Belo Horizonte, 2002.

SOUZA, Rafael Alves de. **Concreto estrutural: Análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades**. 2004. 379 f. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola Politécnica da Usp, São Paulo, 1999.

VECCHIO, F.J., COLLINS, M.P (1986)- **Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear**, ACI Journal, Proc. V.83, No.2, Mar-Apr., pp 219-231.